Sobre la clasificación combinatoria de variedades esféricas

Viviana Ferrer

Orientador: Alvaro Rittatore

Octubre de 2004

Trabajo Monográfico
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la clasificación combinatoria de variedades esféricas, más precisamente establecer un diccionario entre las variedades esféricas y determinados objetos combinatorios que llamaremos *abanicos coloreados*. Estos objetos combinatorios permiten describir la geometría de las variedades esféricas –por ejemplo es posible describir las órbitas y sus adherencias a partir de ellos, decidir si la variedad es afín o completa–. Este diccionario generaliza al que se obtiene para variedades tóricas ([**6**]).

Sea G un grupo algebraico afín conexo reductivo y H un subgrupo algebraico de G, diremos que H es esférico en G –o que G/H es un espacio homogéneo esférico– si algún subgrupo de Borel B de G tiene una órbita abierta en G/H, cuando consideramos la acción por traslación a izquierda de B en G/H.

Diremos que una variedad algebraica normal X en la que G actúa es una variedad esférica si es una inmersión equivariante de un espacio homogéneo esférico G/H, es decir si existe una inmersión abierta G-equivariante $G/H \hookrightarrow X$. En ese caso G/H es isomorfo a una órbita abierta Gx de X, donde el estabilizador de x en G es H.

La teoría de espacios homogéneos esféricos unifica la teoría de tres tipos importantes de espacios homogéneos: los toros, en el caso $G = T = B$ y $H = \{e\}$; las variedades simétricas –espacios homogéneos de la forma G/H donde H es el grupo de puntos fijos de una involución de G– y las variedades horosféricas –espacios homogéneos de la forma G/H donde H contiene un subgrupo unipotente maximal de G–; un caso particular de variedad horosférica son las variedades de banderas –espacios de la forma G/P, donde P es un subgrupo parabólico de G–.

El interés en el estudio de este tipo de espacios homogéneos viene dado por las siguientes propiedades que caracterizan a los espacios homogéneos esféricos: desde el punto de vista geométrico, toda inmersión de G/H contiene un número finito de órbitas; y en términos de representaciones, para todo G-módulo irreducible M y para todo caracter χ de H, la dimensión del subespacio $M_\chi := \{m \in M \mid c \cdot m = \chi(c)m \ \forall c \in H\}$ es menor o igual a uno ([**4**]).

Por otro lado, el estudio de la geometría de los espacios homogéneos esféricos adquiere una singular importancia cuando se quiere estudiar las compactificaciones de espacios homogéneos, i.e. variedades completas en las que un grupo algebraico G actúa y que contienen una órbita abierta isomorfa a G/H, para algún subgrupo $H \subset G$. Estas variedades algebraicas son una de las familias que mejor se comprenden y ocupan un lugar muy importante en la teoría geométrica de invariantes.

El nombre de espacios homogéneos *esféricos* proviene del estudio de la situación análoga para grupos de Lie compactos, y en particular del caso $G = SO_{n+1}(\mathbb{R})$ y $H = SO_n(\mathbb{R})$ –ya que $SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$ es difeomorfo a la esfera S^n–.

La teoría de inmersiones de espacios homogéneos esféricos fué desarrollada por Luna, Vust, Brion y otros a partir de 1980. En 1983, en su trabajo *Plongements d'espaces homogènes* [**13**] Luna y Vust desarrollan el estudio de las inmersiones de espacios homogéneos en general. Siguiendo este trabajo aparecen otros que describen la teoría en casos particulares, por ejemplo en [**15**] Vust ilustra la teoría para inmersiones de espacios simétricos y obtiene una clasificación combinatoria de dichas inmersiones en cuerpos de característica cero. Por otro lado, en [**10**] Knop describe la clasificación combinatoria de las variedades esféricas en cuerpos de característica arbitraria.

Resumen

Sean G/H un espacio homogéneo esférico y B un subgrupo de Borel de G tal que $BH \subset G$ es abierto. Notaremos

$$\mathcal{D}(G/H) = \{D \subset G/H \mid D \text{ es un divisor primo } B\text{-estable }\}.$$

Este conjunto coincide con el conjunto de las componentes irreducibles del conjunto cerrado $(G/H) \setminus (BH/H)$. Para cada $D \in \mathcal{D}(G/H)$, notaremos ν_D a la valuación del cuerpo $\Bbbk(G/H)$ que tiene por centro a D.

Notaremos

$$\mathcal{V}(G/H) = \{\nu \mid \nu \text{ es valuación } G\text{-invariante de } \Bbbk(G/H)\},$$

donde por valuación G-invariante de $\Bbbk(G/H)$ entendemos una valuación discreta ν tal que $\nu(a \cdot f) = \nu(f)$ para todo $a \in G$ y $f \in \Bbbk(G/H)$.

Estudiaremos primero la clasificación de variedades esférias *simples*, –por variedad simple entendemos una variedad con una única G-órbita cerrada–.

Si X es una inmersión simple de G/H, notaremos Y a la única G-órbita cerrada de X. Notaremos

$$\mathcal{D}(X) = \{D \subset X \mid D \text{ es un divisor primo } B\text{-estable}\}.$$

Fijemos nuestra atención en el siguiente subconjunto de $\mathcal{D}(X)$:

$$\mathcal{D}_Y(X) = \{D \in \mathcal{D}(X) \mid \ Y \subset D\}.$$

El hecho de que X contiene un número finito de B-órbitas implica que $\mathcal{D}(X)$ –y por lo tanto $\mathcal{D}_Y(X)$– es un conjunto finito.

Este conjunto se descompone del siguiente modo: $\mathcal{D}_Y(X) = \mathcal{B}(X) \cup \mathcal{F}(X)$, donde

$$\mathcal{B}(X) = \{D \in \mathcal{D}_Y(X) \mid D \text{ es } G\text{-estable}\}$$

$$\mathcal{F}(X) = \{D \in \mathcal{D}_Y(X) \mid D \ \text{ no es } G\text{-estable}\}$$

El primer resultado que obtendremos es que la inmersión simple X queda determinada, salvo isomorfismos G-equivariantes, por el par $(\mathcal{B}(X), \mathcal{F}(X))$.

Notaremos

$$\mathcal{X}(G/H) = \{\chi \in \mathcal{X}(B) \mid {}^{(B)}\Bbbk(G/H)_\chi \neq \{0\}\},$$

–i.e. $\mathcal{X}(G/H)$ es el retículo formado por los pesos de B en $\Bbbk(G/H)$– y

$$V(G/H) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}(G/H), \mathbb{Q}).$$

Como $BH/H \subset G/H$ es abierto deducimos que $\mathcal{X}(G/H) \simeq {}^{(B)}\Bbbk(G/H)/\Bbbk^*$. Luego podemos considerar a toda valuación ν de $\Bbbk(G/H) = \Bbbk(X)$ como un elemento de $V(G/H)$. Si notamos $\rho(\nu)$ a ese elemento, obtenemos un mapa ρ de las valuaciones de $\Bbbk(G/H) = \Bbbk(X)$ en $V(G/H)$. Mas aún, probaremos que la restricción de ρ a las valuaciones G-invariantes $\rho_{|\mathcal{V}(G/H)} : \mathcal{V}(G/H) \to V(G/H)$ es un mapa inyectivo.

A partir de ahora cuando hagamos referencia al espacio vectorial $V(G/H)$, estaremos haciendo referencia al par $(V(G/H), \mathcal{V}(G/H))$.

Notaremos $\mathcal{C}_X$ al cono poliédrico de $V(G/H)$ generado por $\mathcal{B}(X)$ y $\rho(\mathcal{F}(X))$ (observar que estamos identificando $\mathcal{B}(X)$ con $\rho(\mathcal{B}(X))$). Probaremos que el conjunto $\mathcal{B}(X)$ puede ser recuperado a partir del par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$, de donde se deduce que la inmersión simple X queda determinada por el par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$.

Los conos poliédricos de $V(G/H)$ que aparecen como conos asociados a inmersiones simples de G/H verifican las propiedades de los *conos coloreados*: un cono coloreado de $V(G/H)$ es un par $(\mathcal{C},\mathcal{F})$, donde $\mathcal{C}\subset V(G/H)$, $\mathcal{F}\subset\mathcal{D}(G/H)$, tal que:

[C1] $\mathcal{C}$ es un cono generado por $\rho(\mathcal{F})$ y un número finito de elementos de $\mathcal{V}(G/H)$.

[C2] El interior de $\mathcal{C}$ contiene al menos una valuación G-invariante.

Un cono coloreado se dice estrictamente convexo si $\mathcal{C}$ es estrictamente convexo y $\rho(\mathcal{F})$ no contiene al origen.

Recíprocamente, dado un cono coloreado estrictamente convexo $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ de $V(G/H)$, construiremos una variedad esférica simple X tal que $(\mathcal{C}_X,\mathcal{F}(X))=(\mathcal{C},\mathcal{F})$.

Obtenemos entonces una biyección entre conos coloreados estrictamente convexos de $V(G/H)$ e inmersiones esféricas simples de G/H.

Hasta ahora hemos considerado el caso en que X es una inmersión simple de G/H. Si la inmersión X no es simple, probaremos que podemos cubrirla por abiertos que son variedades esféricas simples, éstos abiertos se contruyen del siguiente modo: para cada órbita Y de X el conjunto

$$X_{Y,G}:=\{y\in X\mid Y\subset\overline{Gy}\}$$

es una inmersión simple de G/H (con única órbita cerrada Y), que es un abierto de X. Luego, a cada órbita de X le asociamos un cono coloreado –el cono coloreado de la variedad $X_{Y,G}$– que notaremos $(\mathcal{C}_Y(X),\mathcal{F}_Y(X))$.

Notaremos

$$F(X)=\{(\mathcal{C}_Y(X),\mathcal{F}_Y(X))\mid Y \text{es } G\text{-órbita de } X\}.$$

Ordenamos los elementos de $F(X)$ del siguiente modo:

$$(\mathcal{C}',\mathcal{F}')<(\mathcal{C},\mathcal{F})\quad\text{si}\quad(\mathcal{C}',\mathcal{F}')\,\text{es una } \textit{cara coloreada}\text{ de}\,(\mathcal{C},\mathcal{F}).$$

Una cara coloreada de un cono $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ es un par $(\mathcal{C}',\mathcal{F}')$ tal que $\mathcal{C}'$ es una cara de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'^{\circ}\cap\mathcal{V}(G/H)\neq\emptyset$ y $\mathcal{F}'=\mathcal{F}\cap\rho^{-1}(\mathcal{C}')$.

Si además ordenamos a las G-órbitas de X por inclusión de sus adherencias, obtenemos una biyección que revierte el orden entre G-órbitas de X y $F(X)$:

$$\overline{Y}\subset\overline{Z}\longmapsto(\mathcal{C}_Z(X),\mathcal{F}_Z(X))<(\mathcal{C}_Y(X),\mathcal{F}_Y(X)).$$

Los datos combinatorios que aparecen asociados a una inmersión X (i.e. el conjunto $F(X)$) forman un *abanico coloreado*. Un abanico coloreado es un conjunto finito F de conos coloreados tales que:

[F1] Toda cara coloreada de un cono coloreado de F es un elemento de F.

[F2] Para toda $\nu\in\mathcal{V}$ existe a lo sumo un cono $(\mathcal{C},\mathcal{F})\in F$ tal que $\nu\in\mathcal{C}^{\circ}$.

Un abanico F es estrictamente convexo si está formado por conos coloreados estrictamente convexos.

Probaremos que todo abanico coloreado estrictamente convexo proviene de una inmersión esférica de G/H. Obtendremos así una biyección entre inmersiones de G/H y abanicos coloreados estrictamente convexos.

Estudiaremos luego los morfismos entre variedades esféricas, y su relación con la combinatoria de las variedades.

Si $\varphi:G/H\to G/H'$ es un morfismo G-equivariante de espacios homogéneos esféricos, entonces $\varphi_*:\Bbbk(G/H')\to\Bbbk(G/H)$ induce un mapa lineal

$$\varphi^*:V(G/H)\to V(G/H'),\quad\text{dado por}\quad\varphi^*(\nu)=\nu\circ\varphi_*.$$

Si X y X' son inmersiones de G/H y de G/H' respectivamente, probaremos que el morfismo φ se extiende a un morfismo de X en X' si y sólo si para todo cono $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de $F(X)$ existe un cono $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ de $F(X')$ tal que:

[M1] $\varphi_*(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$

[M1] $\varphi_*(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_\varphi) \subset \mathcal{F}'$ (donde $\mathcal{F}_\varphi = \{D \in \mathcal{F} \mid \overline{\varphi(D)} = G/H'\}$).

A continuación describimos brevemente el contenido de cada capítulo.

El primer capítulo contiene las definiciones y resultados que usaremos en el trabajo sobre valuaciones y divisores de una variedad normal, representaciones de grupos reductivos y conos poliedrales.

El segundo capítulo consta de dos secciones. En la primera presentamos la definición de variedad esférica, propiedades que las caracterizan y una lista de ejemplos.

En la segunda sección estudiamos las valuaciones invariantes del cuerpo de funciones racionales de una variedad esférica X, como se ve en el resumen, éstas valuaciones son la clave de la clasificación combinatoria de variedades esféricas.

Por otro lado estudiamos la descomposición de una variedad esférica en variedades esféricas simples; y probamos que toda variedad simple se puede cubrir con abiertos afines B-estables. Mas aún, probaremos que estos abiertos son trasladados por G de un abierto afín canónico que notaremos X_0.

Finalmente estudiamos el retículo $\mathcal{X}(G/H)$ formado por los pesos de B en $\Bbbk(G/H)$, y probamos que existe un mapa inyectivo del conjunto $\mathcal{V}(G/H)$ formado por las valuaciones G-invariantes de $\Bbbk(G/H)$ al espacio vectorial $V(G/H)$.

En el tercer capítulo obtenemos la clasificación combinatoria de las inmersiones esféricas simples de G/H, por medio de conos coloreados estrictamente convexos del espacio vectorial $V(G/H)$ –recordar que estamos considerando dentro de $V(G/H)$, el dato $\mathcal{V}(G/H)$–. El capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección le asociamos objetos combinatorios a una variedad esférica simple y probamos que éstos objetos la determinan (salvo isomorfismos G-equivarientes). Además obtenemos un diccionario que traduce propiedades de las valuaciones G-invariantes de $\Bbbk(G/H)$ en propiedades de las valuaciones consideradas como elementos de $V(G/H)$.

En la segunda sección definimos conos coloreados y probamos que existe una biyección entre variedades esféricas simples y conos coloreados estrictamente convexos de $V(G/H)$. El punto clave para probar esta biyección es construir, a partir de un cono coloreado $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, la inmersión esférica simple X tal que $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

En el capítulo cuarto obtenemos la clasificación de variedades esféricas de G/H por medio de abanicos coloreados, y una descripción de los morfismos entre variedades esféricas en términos combinatorios.

El capítulo cinco está dedicado a mostrar ejemplos de variedades esféricas. Mostramos cómo se obtiene la clasificación clásica de las variedades tóricas por medio de abanicos estrictamente convexos a partir de su clasificación como variedad esférica. Luego describimos explícitamente los datos combinatorios del espacio homogéneo $SL_2(\mathbb{C})/SO_2(\mathbb{C})$.

Si bien por simplicidad hemos elegido trabajar sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, todos los resultados valen –con algunos cambios en las pruebas– para cuerpos algebraicamente cerrados de característica arbitraria.

Este trabajo sigue de cerca las notas *Variétés Spheriqués*, M. Brion [**3**], y el artículo *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, F. Knop [**10**].

Agradecimientos

Agradezco a mi orientador Alvaro Rittatore, por su ayuda en la elaboración de este trabajo, pero sobre todo por su incansable aliento y su inquebrantable confianza.

Agradezco al PEDECIBA por al apoyo económico que me brindó y sin el cual hubiese sido difícil llevar acabo este trabajo.

Además un gran gracias para mi familia, y para los amigos y colegas que me han acompañado en esta etapa, especialmente para Angel y Walter.

CAPíTULO 1

Preliminares

En este capítulo reunimos las definiciones y resultados de geometría algebraica, acciones de grupos en variedades, representaciones de grupos reductivos, valuaciones y conos racionales, que serán necesarios en el desarrollo del trabajo. Los resultados que presentamos sin prueba aparecen con las respectivas referencias. La referencia general para los resultados de geometría algebraica es [**8**].

En todo el trabajo $\Bbbk$ denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y G denotará un grupo algebraico afín conexo.

Si X es una variedad algebraica, $\Bbbk(X)$ denotará el cuerpo de funciones racionales de X. Si además $Z \subset X$ es una subvariedad, $\mathcal{O}_{X,Z}$ denotará el anillo de funciones racionales en X definidas en Z y $m_{X,Z}$ el ideal de $\mathcal{O}_{X,Z}$ formado por las funciones racionales que se anulan en Z. Si $U \subset X$ es un subconjunto abierto, $\mathcal{O}_X(U)$ denotará el anillo de funciones regulares en U. En el caso en que U es afín notaremos $\Bbbk[U]$ al anillo $\mathcal{O}_X(U)$.

Si X es una variedad afín y $Z \subset X$ es un cerrado notaremos $\Bbbk[Z]$ a $\mathcal{O}_{X,Z}$ e $I(Z)$ a $m_{X,Z}$.

Una G-variedad será una variedad algebraica X en la que G actúa y tal que el mapa $\psi : G \times X \to X$ dado por $\psi(a, x) = a \cdot x$ para todo $a \in G$, $x \in X$, es un morfismo de variedades algebraicas.

Si X es una G-variedad, la acción de G en X induce una acción a izquierda de G en $\mathcal{O}_X(X)$ del siguiente modo: $a \cdot f(x) = f(a^{-1} \cdot x)$ para todo $x \in X$, $a \in G$ y $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Esta acción se extiende a $\Bbbk(X)$ del siguiente modo: si $f \in \Bbbk(X)$ está definida en un abierto $U \subset X$ y $a \in G$, definimos $a \cdot f$ en el abierto aU como $a \cdot f(x) = f(a^{-1}x)$. Análogamente definiendo $(f \cdot a)(x) = f(xa^{-1})$ para todo $x \in X$, $a \in G$ y $f \in \mathcal{O}_X(X)$, se obtiene una acción a derecha de G en $\Bbbk(X)$.

Un G-módulo M es un G-módulo racional si para todo $m \in M$ se tiene que el G-módulo generado por m es de dimensión finita.

Si X es una G-variedad algebraica afín, entonces $\Bbbk[X]$ es un G-módulo racional. Si $Z \subset X$ es cerrado G-estable, entonces $I(Z)$ es un G-submódulo racional de $\Bbbk[X]$.

1. Valuaciones y divisores

Agrupamos aquí resultados sobre valuaciones, anillos de valuación discreta y divisores de una variedad normal. Estos objetos son la base de la clasificación combinatoria de las variedades esféricas.

Definiciones 1.1. Sea K un cuerpo. Un subanillo $R \subset K$ es un *anillo de valuación* si para todo $u \in K \setminus \{0\}$ se cumple que $u \in R$ o $u^{-1} \in R$.

Si además $K^*/U(R)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, donde $U(R)$ es el grupo de invertibles de R, diremos que R es un *anillo de valuación discreta* (DVR).

Proposición 1.1. *Si R es un DVR, entonces R es un anillo local y su único ideal maximal es $R \setminus U(R)$. Mas aún, R es un dominio de ideales principales.*

Demostración: Ver por ejemplo [**7**]. □

DEFINICIÓN 1.1. Si K es un cuerpo, una *valuación discreta* de K es una aplicación $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ tal que:

1. $\nu(f_1 + f_2) \geq min(\nu(f_1), \nu(f_2))$ para todo $f_1, f_2 \in K^*$ tales que $f_1 + f_2 \in K^*$.
2. $\nu(f_1 f_2) = \nu(f_1) + \nu(f_2)$ para todo $f_1, f_2 \in K^*$.
3. $\nu(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in K^*$.

Si X es una variedad normal irreducible, diremos que ν es una valuación discreta de X si es una valuación discreta de $\Bbbk(X)$.

DEFINICIÓN 1.2. Si ν es una valuación discreta de X, construimos el *anillo asociado a* ν como $O_\nu := \{f \in \Bbbk(X)^* \mid \nu(f) \geq 0\} \cup \{0\} \subset \Bbbk(X)$ y el *ideal asociado* a ν como $m_\nu = \{f \in \Bbbk(X)^* \mid \nu(f) > 0\} \cup \{0\} \subset O_\nu$.

PROPOSICIÓN 1.2. *En las hipótesis de la definición 1.2, si ν es una valuación discreta de un cuerpo K, entonces O_ν es un DVR y m_ν es su único ideal maximal.*

Recíprocamente, si $R \subset K$ es un DVR en K, entonces existe una valuación discreta $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ tal que $O_\nu = R$ y $m_\nu = R \setminus U(R)$.

Demostración: Ver por ejemplo [**7**]. □

DEFINICIÓN 1.3. Si X es una variedad normal e irreducible, el *centro* de una valuación discreta ν de X es una subvariedad cerrada Z_ν tal que $O_{X,Z_\nu} \subset O_\nu$ y $m_{X,Z_\nu} \subset m_\nu$, de hecho $m_{X,Z_\nu} = m_\nu \cap O_{X,Z_\nu}$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea X una variedad normal irreducible. Una valuación ν de X tiene centro Z si y sólo si existe U abierto afín de X tal que $U \cap Z \neq \emptyset$, $\Bbbk[U] \subset O_\nu$ y $\Bbbk[U] \cap m_\nu = I(U \cap Z) \subset \Bbbk[U]$. En particular si X es afín, una valuación ν tiene centro si y sólo si es no negativa en $\Bbbk[X]$. En ese caso Z_ν está definido por el ideal $\Bbbk[X] \cap m_\nu$.*

Mas aún, si una valuación tiene centro, éste es único.

Demostración: Ver por ejemplo [**7**] y [**8**]. □

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea X una variedad normal irreducible. Entonces toda subvariedad cerrada $Z \subset X$ es el centro de una valuación en X, que notaremos ν_Z.*

Demostración: Ver por ejemplo [**10**]. □

DEFINICIÓN 1.4. Sea X una variedad normal e irreducible, un *divisor primo* de X es una subvariedad cerrada, irreducible, de codimensión uno en X.

LEMA 1.1. *Si D es un divisor primo de X, entonces $\mathcal{O}_{X,D}$ es un DVR con cuerpo de fracciones $\Bbbk(X)$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**7**]. □

NOTACIÓN 1.1. Si D es un divisor primo de X (normal), notaremos ν_D a la valuación asociada a $\mathcal{O}_{X,D}$. Por definición D es el centro de ν_D.

OBSERVACIÓN 1.1. Si $f \in \Bbbk(X)$ y D es un divisor primo de X (normal), entonces si $\nu_D(f) > 0$ (respectivamente $\nu_D(f) < 0$), existe $U \subset D$ abierto tal que f es nula en U (respectivamente $\frac{1}{f}$ es nula en U).

DEFINICIÓN 1.5. Sean $f \in \Bbbk(X)$ una función racional no nula y $D \subset X$ un divisor primo, entonces $\nu_D(f) \in \mathbb{Z}$. Diremos que f tiene un *cero* (respectivamente *polo*) a lo largo de D si $\nu_D(f) > 0$ (respectivamente $\nu_D(f) < 0$).

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea X una variedad normal e irreducible. Si $f \in \Bbbk(X)$ es no nula, entonces $\nu_D(f) = 0$ salvo para un número finito de divisores primos D de X.*

Demostración: Ver por ejemplo [**8**]. □

Definición 1.6. Sea X una variedad normal e irreducible, un *divisor de Weil* es un elemento del grupo abeliano libre generado por los divisores primos de X, i.e. un divisor de Weil es de la forma $\sum n_i D_i$, donde D_i recorre el conjunto de los divisores primos de X, $n_i \in \mathbb{Z}$ y sólo un número finito de ellos es no nulo.

Si $f \in \Bbbk(X) \setminus \{0\}$ definimos el *divisor de* f como $(f) = \sum \nu_D(f)D$, donde D recorre el conjunto de los divisores primos de X. Por la proposición 1.5, (f) es un divisor de Weil de X. Los divisores de Weil de la forma (f) para alguna $f \in \Bbbk(X) \setminus \{0\}$ se llaman *divisores principales*.

Proposición 1.6. *Si X es una variedad afín irreducible, entonces $\Bbbk[X]$ es un dominio de factorización única si y sólo si X es normal y todo divisor de X es principal.*

Demostración: Ver por ejemplo [**8**]. □

Teorema 1.1. *Sean X una variedad normal e irreducible y $f \in \Bbbk(X)$. Entonces $f \in \mathcal{O}_X(X)$ si y sólo si $\nu_D(f) \geq 0$ para todo divisor primo $D \subset X$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**7**]. □

Observación 1.2. Si X es una variedad irreducible y U es un subconjunto abierto de X, entonces existe una biyección entre el conjunto de divisores primos de U y el conjunto de divisores primos $F \subset X$ tales que $F \cap U \neq \emptyset$. Esta biyección está dada por: $D \mapsto \overline{D}^X$, si D es un divisor de U y $F \mapsto F \cap U$, si F es un divisor de X tal que $F \cap U \neq \emptyset$.

Además, si D es un divisor de U, ν_D es una valuación de $\Bbbk(U) = \Bbbk(X)$ y $\nu_D = \nu_{\overline{D}^X}$ cuando consideramos a ν_D como valuación de $\Bbbk(X)$. Recíprocamente, si F es un divisor de X tal que $F \cap U \neq \emptyset$, tenemos $\nu_F = \nu_{F\cap U}$, cuando consideramos a ν_F como valuación de $\Bbbk(U)$.

Corolario 1.1. *Sean X una variedad normal irreducible, U un subconjunto abierto de X y $f \in \Bbbk(X)$ una función racional. Entonces f es regular en X si y sólo si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y $\nu_D(f) \geq 0$ para todo divisor D de X contenido en $X \setminus U$.*

Demostración: Si f es regular en X, entonces por $\nu_F(f) \geq 0$ para todo divisor primo F de X. Recíprocamente, sea F un divisor primo de X. Si $F \cap U \neq \emptyset$, entonces $\nu_F(f) = \nu_{F\cap U}(f) \geq 0$, ya que $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Si $F \subset X \setminus U$, por hipótesis $\nu_F(f) \geq 0$, y se deduce del teorema 1.1 que f es regular en X. □

Proposición 1.7. *Si ν es una valuación del cuerpo K y K' es una extensión de K, entonces existe ν' valuación de K' tal que $\nu'_{|K} = \nu$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**2**]. □

Lema 1.2. *Sean X una variedad normal e irreducible y $x \in X$. Sea $f \in \Bbbk(X)$ una función racional que no está definida en x. Entonces existe una subvariedad cerrada irreducible $Y \subset X$ tal que: $x \in Y$; Y intersecta al dominio de $\frac{1}{f}$ y para todo $y \in Y$ donde $\frac{1}{f}$ está definida, se cumple que $\frac{1}{f}(y) = 0$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**5**]. □

Teorema 1.2. *Sean X una variedad normal irreducible, $U \subset X$ abierto tal que $\operatorname{codim}(X \setminus U) \geq 2$ y f una función racional de X definida en U. Entonces f se puede extender a una función regular en X.*

En particular, si Y es una variedad afín y $\varphi : U \to Y$ es un morfismo. Entonces φ se puede extender a un morfismo $\tilde{\varphi} : X \to Y$.

Demostración: Ver por ejemplo [**5**]. □

Proposición 1.8. *Sean X variedad normal irreducible y $U \subsetneq X$ un abierto afín no vacío, entonces $X \setminus U$ es unión de divisores de X.*

Demostración: Sea $X \setminus U = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ una descomposición de $X \setminus U$ en componentes irreducibles. Sea X_i una de las componentes irreducibles. Consideremos el abierto normal $V = X \setminus (\cup_{j \neq i} X_j) = U \cup Y_i$, donde $Y_i = X_i \setminus (\cup_{j \neq i} X_j)$. Observemos que $\operatorname{codim}_X(X_i) = \operatorname{codim}_V(Y_i)$. Supongamos que $\operatorname{codim}_X(X_i) \geq 2$, entonces $\operatorname{codim}_V(Y_i) \geq 2$ y por el corolario anterior la función identidad $\mathrm{id}_U : U \to U$ se extiende a $f : V \to U$. Entonces f y id_V coinciden en el abierto U y por lo tanto en V, de donde $U = V$.

□

Notación 1.2. Si A es un álgebra sobre $\Bbbk$, notaremos A^* a $U(A)$, i.e. al grupo de invertibles de A.

Proposición 1.9 (M. Rosenlicht). *Sean X, Y variedades algebraicas irreducibles. Entonces el mapa canónico $\Bbbk[X]^* \times \Bbbk[Y]^* \to \Bbbk[X \times Y]^*$ es sobreyectivo.*

Demostración: Ver por ejemplo [**12**]. □

Sea G un grupo algebraico afín conexo. El siguiente resultado nos permite trabajar en el caso en que $\Bbbk[G]$ es un dominio de factorización única i.e. todos los divisores de G son principales.

Proposición 1.10. *Sea G un grupo algebraico conexo, entonces existe un cubrimiento finito de grupos algebraicos $\tilde{G} \to G$ tal que $\Bbbk[\tilde{G}]$ es un dominio de factorización única.*

Demostración: Ver por ejemplo [**11**]. □

Proposición 1.11. *Sean G un grupo algebraico afín conexo tal que $\Bbbk[G]$ es un dominio de factorización única, $H \subset G$ un subgrupo y D un divisor H-estable de G. Entonces existe $f \in \Bbbk[G]$, que es un vector propio para H y tal que $D = \{f = 0\}$.*

Demostración:

Consideremos la siguiente acción de H en $\Bbbk[G]$: si $a \in H$ y $f \in \Bbbk[G]$, entonces $(f \cdot a)(x) = f(xa^{-1})$ para todo $x \in G$.

Supongamos que D es un divisor primo y que el subgrupo H es conexo. Sea $f \in \Bbbk[G]$ tal que $D = \{f = 0\}$. Como D es H-estable, si $a \in H$, entonces $\{f \cdot a = 0\} = D$, y como $\Bbbk[G]$ es un dominio de factorización única, existe $\alpha_a \in \Bbbk[G]^*$ tal que $f \cdot a = \alpha_a f$. Sea $\alpha : H \times G \to \Bbbk$ tal que $\alpha(a, b) = \alpha_a(b) = \frac{(f \cdot a)(b)}{f(b)}$, entonces $\alpha \in \Bbbk(H \times G)$. Afirmamos que $\alpha \in \Bbbk[H \times G]$. En efecto, si α no está definida en un punto de $H \times G$, por el lema 1.2 existe $(a, b) \in H \times G$ tal que $\frac{1}{\alpha(a,b)} = 0$, pero esto es absurdo ya que α_a es invertible en $\Bbbk[G]$.

Observemos además que $\alpha_a(b)\alpha_{a^{-1}}(ba^{-1}) = 1$ para todo $a \in H$ y $b \in G$, de donde se deduce que $\alpha \in \Bbbk[H \times G]^*$.

La proposición 1.9 asegura que existen $h \in \Bbbk[H]^*$ y $g \in \Bbbk[G]^*$ tales que $\alpha_a(b) = h(a)g(b)$ para todo $a \in H$ y $b \in G$, de donde $f \cdot a = h(a)gf$.

Para $a = e$ obtenemos $f = h(e)gf$ y como $\Bbbk[G]$ es dominio de factorización única resulta que $g = h(e)^{-1}$. Luego f es H-vector propio de peso $h(e)^{-1}h$.

Si D no es primo, lo descomponemos en componentes irreducibles estables por H (H es conexo) y aplicamos lo anterior a cada una de las ecuaciones de sus componentes irreducibles.

Si H no es conexo, sean H° la componente conexa de H que contiene a la identidad y $H = H^\circ a_0 \cup H^\circ a_1 \cup \cdots \cup H^\circ a_r$ una descomposición de H en coclases, con $a_i \in H$ y $a_0 = e$.

Sea además $D = \bigcup_Z Z$ una descomposición de D en componentes irreducibles. Como H° es conexo, cada Z es estable por H°. Entonces

$$D = DH = \bigcup_Z ZH = \bigcup_Z (Z \cup Za_1 \cup \cdots \cup Za_r),$$

y obtenemos una descomposición de D de la forma $D = \bigcup_{Z,i} Za_i$, donde Za_i es un divisor primo H°-estable: si $a \in H^\circ$, tenemos que $Za_i a = Za' a_i$, para algún $a' \in H^\circ$, de donde deducimos que $Za_i a = Za_i$.

Por lo probado en el caso en que H es conexo, para cada Z existe $f_Z \in \Bbbk[G]^{(H^\circ)}$ tal que $\{f_Z = 0\} = Z$. Observemos además que $\{f_Z \cdot a_i = 0\} = Z \cdot a_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Si consideramos $g_Z = \prod_{i=0}^r (f_Z \cdot a_i)$, entonces es fácil ver que $g_Z \in \Bbbk[G]^{(H)}$ y $\{g_Z = 0\} = Z \cup Za_1 \cup \cdots \cup Za_r$, luego $g = \prod_Z g_Z \in \Bbbk[G]^{(H)}$ y $\{g = 0\} = D$.

□

El siguiente teorema nos permitirá estudiar, dados dos espacios homogéneos y un morfismo G-equivariante $\varphi : G/H \to G/H'$, la relación entre divisores de un espacio y divisores del otro. En particular obtendremos la relación entre los divisores de G y de G/H, para todo subgrupo $H \subset G$.

Teorema 1.3 (Chevalley). *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo dominante entre variedades irreducibles. Entonces existe un abierto denso $U \subset Y$ tal que:*

- *$U \subset \varphi(X)$.*
- *Si $W \subset Y$ es una subvariedad cerrada irreducible y Z es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(W)$ tal que $Z \cap \varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$, entonces* $\dim Z = \dim W + \dim X - \dim Y$.

Demostración: Ver por ejemplo [**1**]. □

Lema 1.3. *Sean G/H y G/H' espacios homogéneos y $\varphi : G/H \to G/H'$ un morfismo G-equivariante. Si D es un divisor primo de G/H', entonces $\varphi^{-1}(D)$ es unión de divisores primos de G/H. Si E es un divisor primo de G/H y $\overline{\varphi(E)} \subsetneq G/H'$, entonces $\overline{\varphi(E)}$ es un divisor primo de G/H'.*

Demostración: Como φ es G-equivariante y G/H' es una G-órbita, deducimos que φ es sobreyectiva.

Si Z es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(D)$, el teorema 1.3 asegura que existe un abierto $U \subset G/H'$ tal que si $\varphi^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$ entonces $\dim Z = \dim D + \dim G/H - \dim G/H'$. Luego si $\varphi^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$ tenemos que $\operatorname{codim}_{G/H} Z = 1$.

Observemos además que como G/H' es homogéneo, dada una componente irreducible $Z \subset \varphi^{-1}(D)$, existe $a \in G$ tal que $aU \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, luego $\varphi^{-1}(U) \cap a^{-1}Z \neq \emptyset$, de donde $a^{-1}Z$ es un divisor de G/H y por lo tanto Z lo es.

Si E es un divisor de G/H, consideremos el cerrado irreducible $\overline{\varphi(E)} \subset G/H'$ y sea Z una componente irreducible de $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(E)})$. Entonces $\dim E \leq \dim Z$ (ya que $E \subset \varphi^{-1}(\overline{\varphi(E)})$) y el teorema 1.3 asegura que si $\varphi^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$, entonces $\dim E \leq \dim Z = \dim \overline{\varphi(E)} + \dim G/H - \dim G/H'$, de donde $\operatorname{codim}_{G/H'} \overline{\varphi(E)} \leq 1$. Es decir $\overline{\varphi(E)} = G/H'$ o es un divisor de G/H'.

□

El siguiente resultado será muy útil a la hora de trabajar con variedades esféricas, ya que éstas están caracterizadas por la finitud del número de B-órbitas, donde B es un subgrupo de Borel de G.

Lema 1.4. *Sean G un grupo algebraico afín conexo y X una G-variedad irreducible. Si X tiene un número finito de G-órbitas, entonces tiene una órbita abierta.*

Demostración: Lo probaremos por inducción en el número de G-órbitas de X. Si X tiene sólo una G-órbita Y, es claro que $X = Y$. Supongamos que la proposición vale para variedades con un número de órbitas menor que n y sea X una variedad con n G-órbitas.

Sea Y una órbita de X, si $\overline{Y} = X$, entonces Y es abierto en X, ya que toda órbita es abierta en su clausura. Si $\overline{Y} \neq X$, entonces $X \setminus \overline{Y}$ es un abierto G-estable de X, por lo tanto es unión –de un número menor que n– de G-órbitas. Luego, por hipótesis inductiva, alguna de las órbitas es abierta en $X \setminus \overline{Y}$ y por lo tanto en X.

□

2. Representaciones de grupos reductivos

En esta sección reunimos definiciones y resultados sobre representaciones de grupos reductivos que asumimos conocidos por el lector.

Una referencia para los resultados que presentamos a continuación es [**9**].

Salvo que se explicite lo contrario, a partir de ahora G será un grupo algebraico afín, reductivo y conexo, $B = TU$ será un subgrupo de Borel de G, donde T es un toro maximal y U es un grupo unipotente maximal de G. Notaremos $B^- = TU^-$ al subgrupo de Borel opuesto a B.

Si H es un subgrupo de G, entonces el conjunto de caracteres de H (i.e. morfismos de grupos algebraicos de H en $\Bbbk^*$) es un grupo abeliano libre, finitamente generado, que notaremos $\mathcal{X}(H)$.

Definición 1.7. Sea M un G-módulo racional. Un *peso* de M es un caracter $\chi \in \mathcal{X}(T)$ tal que $M_\chi := \{m \in M \mid t \cdot m = \chi(t)m \ \forall t \in T\} \neq \{0\}$. Notaremos $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de los pesos de G en M.

Si H es un subgrupo de G, notaremos ${}^{(H)}M$ (respectivamente $M^{(H)}$) al subespacio de vectores propios comunes para la acción de H a izquierda (respectivamente derecha) en M. De igual modo ${}^{H}M$ (respectivamente M^H) denotará el subespacio de puntos fijos de H en M.

Definición 1.8. Si G es un grupo algebraico afín, diremos que un subgrupo $P \subset G$ es *parabólico* si G/P es proyectivo, equivalentemente si P contiene un subgrupo de Borel de G.

Proposición 1.12. *Todo subgrupo parabólico P de G es el producto semidirecto de su radical unipotente $R_u(P)$ con un subgrupo reductivo L. Un subgrupo L de P con esta propiedad se llama* subgrupo de Levi. *Mas aún, dos subgrupos de Levi de P son conjugados por un elemento de $R_u(P)$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**1**]. □

Definición 1.9. Dos subgrupos parabólicos de G se dicen *opuestos* si su intersección es un factor de Levi de ambos.

En cuerpos de característica cero, un grupo algebraico es reductivo si y sólo si es linealmente reductivo (ver [**5**]), de donde se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.4. *Toda representación racional de un grupo algebraico reductivo es semisimple.*

□

Teorema 1.5. *(Lie-Kolchin) Sean B un grupo algebraico soluble y conexo, $M \neq \{0\}$ un B-módulo racional. Entonces ${}^{(B)}M \neq \{0\}$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**9**]. □

Corolario 1.2. *Si $M \neq \{0\}$ es un G-módulo racional, entonces M está generado –como G-módulo– por sus B-vectores propios.*

Demostración: Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de M en G-submódulos simples. Por el teorema de Lie-Kolchin, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $m_i \in {}^{(B)}M_i$ no nulo. Como M_i es simple, está generado –como G-módulo– por m_i y por lo tanto M está generado por $\{m_1, \dots, m_n\}$. □

Definición 1.10. Si $M \neq \{0\}$ es un G-módulo racional, el teorema de Lie-Kolchin asegura que existe $m \in M$ y $\chi \in \mathcal{X}$ tales que $b \cdot m = \chi(b)m$ para todo $b \in B$. Cualquier vector que genera a M_0 se dice *vector maximal para B*.

Observación 1.3. Un vector m es maximal para $B = TU$ si y sólo si $m \neq 0$, $m \in M_\chi$ para algún peso χ de M y es fijo por U.

Teorema 1.6. *Sea M un G-módulo racional simple. Entonces existe un único subespacio B-estable de dimensión uno generado por un vector maximal para B, de peso $\chi_M \in \mathcal{X}(B)$ (el peso χ_M se llama* peso máximo *de M). Más aún ${}^{(B)}M = {}^{U}M$.*

Si M' es otro G-módulo racional simple de peso máximo $\chi_{M'}$, entonces M es isomorfo a M' –como G-módulo– si y sólo si $\chi_M = \chi_{M'}$.

Demostración: Ver por ejemplo [**9**]. □

Observación 1.4. Si notamos $\hat{G}$ al conjunto de clases de isomorfismo de G-módulos racionales simples y si $M \in \hat{G}$, entonces $\dim({}^{U}M) = 1$ y la acción de T en ${}^{(B)}M = {}^{U}M$ está dada por un caracter $\chi_M \in \mathcal{X}(T)$. Tenemos entonces una aplicación de $\hat{G}$ en $\mathcal{X}(T)$ que es inyectiva. La imagen de esta aplicación es el conjunto de *pesos dominantes*. Resumiendo, podemos indexar al conjunto $\hat{G}$ con el conjunto de pesos dominantes.

Si N es un G-módulo racional y $M \in \hat{G}$, entonces un G-submódulo de N es simple e isomorfo a M si y sólo si está generado por un vector propio de B en N de caracter χ_M. Es decir que para conocer la acción de G en N basta conocer los vectores propios de B en N y sus caracteres.

Teorema 1.7. *Sean M un G-módulo racional simple de peso máximo χ y N el G-módulo dual de M. Entonces N es un G-módulo simple de peso máximo $-\chi$ para la acción de B^-. Además, si $m \in M$ es un vector maximal para la acción de B en M, existe un vector $\eta \in N$ de peso $-\chi$ para B^- tal que $\eta(m) = 1$.*

Demostración: Ver por ejemplo [**9**]. □

Lema 1.5. *Sean M y N G-módulos racionales y $\varphi : M \to N$ un morfismo sobreyectivo de G-módulos. Entonces $\varphi_{|{}^{(B)}M} : {}^{(B)}M \to {}^{(B)}N$ es sobreyectivo.*

Demostración: Supongamos que N es un G-módulo simple. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{i=n} M_i$ una descomposición de M es G-submódulos simples. Entonces existe i tal que $\varphi_{|M_i} : M_i \to N$ es no nulo. Luego, el lema de Schur asegura que $\varphi_{|M_i}$ es un isomorfismo y por lo tanto $\varphi_{|{}^{(B)}M_i} : {}^{(B)}M_i \to {}^{(B)}N$ es sobreyectivo.

Si N no es simple, sean $n \in N$ un B-vector propio y N_0 el G-submódulo generado por n. Entonces N_0 es simple y considerando $\varphi_{|\varphi^{-1}(N_0)} : \varphi^{-1}(N_0) \to N_0$, estamos en la situación anterior. Luego, existe $m \in {}^{(B)}M$ tal $\varphi(m) = n$.

□

En general una G-variedad X no admite un cubrimiento por abiertos afines G-estables. Pero probaremos en la proposición 1.13 que X puede cubrirse por abiertos afines que son trasladados (por G) de un abierto afín B-estable. Para ello necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 1.8 (Sumihiro). *Sean G un grupo algebraico afín conexo actuando en una variedad normal X e $Y \subset X$ una G-órbita. Entonces existen un G-módulo racional M de dimensión finita y un entorno abierto G-estable U de Y, tales que U es isomorfo (de forma equivariante) a una subvariedad localmente cerrada y G-estable de $\mathbb{P}(M)$.*

Demostración: Ver [**14**]. □

Definición 1.11. Si $Z \subset \mathbb{P}^n$ es un conjunto cerrado no vacío, el *cono afín sobre Z* se define como $C(Z) = \theta^{-1}(Z) \cup \{(0, \dots, 0)\}$, donde $\theta : \Bbbk^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \to \mathbb{P}^n$ es el mapa que al punto de coordenadas afines $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ le hace corresponder el punto de coordenadas proyectivas $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, i.e. $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$.

Resulta entonces que $C(Z)$ es un cerrado de $\Bbbk^{n+1}$ y el ideal $I(C(Z))$ es el ideal homogéneo $I(Z) \subset \Bbbk[x_0, \dots, x_n]$. Luego $\Bbbk[C(Z)] \simeq \Bbbk[x_0, \dots, x_n]/I(Z)$.

Proposición 1.13. *Sean X una G-variedad normal e $Y \subset X$ una G-órbita. Entonces existe un abierto afín B-estable $X_1 \subset X$ tal que $X_1 \cap Y \neq \emptyset$ y el mapa restricción ${}^{(B)}\Bbbk[X_1] \to {}^{(B)}\Bbbk[X_1 \cap Y]$ es sobreyectivo.*

Demostración: Por teorema de Sumihiro (teorema 1.8) podemos suponer que X está incluído en $\mathbb{P}(M)$, donde M es un G-módulo de dimensión finita. Sean $\overline{X}$, $\overline{Y}$ las adherencias en $\mathbb{P}(M)$ de X e Y respectivamente y $Z = \overline{X} \setminus X$. Sean $C(X)$, $C(Y)$, $C(Z)$ los conos afines en M sobre $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$.

Como $\overline{Y} \not\subset Z$ tenemos que $I(\overline{Z}) \not\subset I(\overline{Y})$ y ${}^{(B)}I(\overline{Z}) \not\subset I(\overline{Y})$ –recordar que $I(\overline{Z})$ es un G-módulo racional, por lo tanto está generado por sus B-vectores propios–. Si f es un B-vector propio homogéneo en ${}^{(B)}I(\overline{Z}) \setminus I(\overline{Y})$, entonces $X_1 := \overline{X} \cap \{f \neq 0\}$ es un abierto afín y B-estable de X. Mas aún, $\Bbbk[X_1] = \Bbbk[C(X)]_f$.

Probemos que X_1 tiene la propiedad requerida: sea $g \in {}^{(B)}\Bbbk[X_1 \cap Y] = {}^{(B)}\Bbbk[C(Y)]_f$; entonces existe un entero $n \geq 0$ tal que $gf^n \in {}^{(B)}\Bbbk[C(Y)]$. El lema 1.5 asegura que existe $h \in {}^{(B)}\Bbbk[C(X)]$ tal que $h_{|C(Y)} = gf^n$, luego g es la restricción a $X_1 \cap Y$ de $hf^{-n} \in {}^{(B)}\Bbbk[C(X)]_f = {}^{(B)}\Bbbk[X_1]$. □

Corolario 1.3. *Si G es un toro, entonces toda G-variedad se puede recubrir por abiertos afines G-estables.*

Demostración: Recordar que si G es un toro, entonces G es soluble y $B = G$. □

Sean M un G-módulo racional de dimensión finita, N el G-módulo dual de M y $\eta \in N$ un B-vector propio. Sea $m \in M$ un vector propio de peso máximo para B^- tal que $\eta(m) = 1$ (teorema 1.7).

Consideremos $[\eta] \in \mathbb{P}(N)$ y $[m] \in \mathbb{P}(M)$; entonces $P = G_{[\eta]}$ es un subgrupo parabólico de G que contiene a B y $G_{[m]}$ es un subgrupo parabólico de G que contiene a B^-.

Notaremos $L = G_{[\eta]} \cap G_{[m]}$ al factor de Levi común de los subgrupos parabólicos opuestos $P = G_{[\eta]}$ y $G_{[m]}$. Entonces $P = R_u(P)L$.

Teorema 1.9. *En las hipótesis del párrafo anterior existe una subvariedad cerrada L-estable $S \subset \mathbb{P}(M)_\eta$, que contiene a $[m]$, tal que el mapa*

$$\Gamma : R_u(P) \times S \to \mathbb{P}(M)_\eta$$

definido por $\Gamma(a, x) \mapsto a \cdot x$ es un isomorfismo P-equivariante, donde la acción de $P = R_u(P)L$ en $R_u(P) \times S$ está dada por $ul \cdot (a, x) = (ulal^{-1}, l \cdot x)$.

Demostración: Ver por ejemplo [**4**]. □

PROPOSICIÓN 1.14. *En las hipótesis del teorema 1.9, si X es la variedad afín $\mathbb{P}(M)_\eta$, entonces* ${}^{(B\cap L)}\Bbbk[S] \simeq {}^{(B)}\Bbbk[X]$.

Demostración: El isomorfismo P-equivariante $\Gamma : R_u(P)\times S \to X$ induce un isomorfismo ${\Gamma^*}_{|{}^{(B)}\Bbbk[X]} : {}^{(B)}\Bbbk[X] \to {}^{(B)}(\Bbbk[R_u(P)]\otimes\Bbbk[S])$. Probaremos que ${}^{(B)}(\Bbbk[R_u(P)]\otimes\Bbbk[S])$ es isomorfo a ${}^{(B\cap L)}\Bbbk[S]$.

Sea $\sum_{i=1}^n f_i\otimes h_i \in \Bbbk[R_u(P)]\otimes\Bbbk[S]$ un vector propio de peso χ para B. Entonces para $u\in R_u(P)\subset B$ tenemos $u\cdot(\sum_{i=1}^n f_i\otimes h_i)(a,x) = \sum_{i=1}^n f_i(u^{-1}a)h_i(x) = \chi(u)\sum f_i(a)h_i(x)$ para todo $a\in R_u(P)$ y $x\in S$.

Como χ es trivial en $R_u(P)$, tenemos que $\sum_{i=1}^n f_i(u^{-1}a)h_i(x) = \sum_{i=1}^n f_i(a)h(x)$ para todo $a,u\in R_u(P)$ y $x\in S$, luego $\sum_{i=1}^n f_i(u^{-1}a)h_i = \sum_{i=1}^n f_i(a)h_i$. Eligiendo funciones h_i linealmente independientes obtenemos que $f_i(u^{-1}a) = f_i(a)$ para todo $a,u\in R_u(P)$ e $i=1,\dots,n$, esto es $u\cdot f_i = f_i$ para todo $u\in R_u(P)$, de donde deducimos que $f_i\in\Bbbk[R_u(P)]$ es constante para todo $i=1,\dots,n$. Luego existe $h' \in^{(B\cap L)} \Bbbk[S]$ tal que $\sum_{i=1}^n f_i\otimes h_i = 1\otimes h' \in 1\otimes {}^{(B\cap L)}\Bbbk[S]$.

Recíprocamente, si $h\in {}^{(B\cap L)}\Bbbk[S]$ y $b = ul\in B$, tenemos que

$$b\cdot(1\otimes h)(a,x) = h(l^{-1}x) = 1\otimes\chi(l)h(x) = \chi(b)(1\otimes h)(a,x),$$

para todo $a\in R_u(P)$ y $x\in S$. Luego $1\otimes h\in {}^{(B)}(\Bbbk[R_u(P)]\otimes\Bbbk[S])$. □

TEOREMA 1.10. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra conmutativa en la que G actúa racionalmente. Sea U un subgrupo unipotente maximal de G. Si A es integralmente cerrada entonces ${}^UA$ lo es. Si ${}^UA$ es integralmente cerrada y A es finitamente generada sobre $\Bbbk$, entonces A es integralmente cerrada.*

Demostración: Ver por ejemplo [**7**]. □

3. Conos

Presentamos a continuación las definiciones y resultados que necesitaremos sobre conos convexos poliédricos. La referencia general para este tema es [**6**].

Sean $\mathcal{Y}\simeq\mathbb{Z}^n$ un retículo y $V = \mathcal{Y}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$; V es un espacio vectorial racional de dimensión n. Notaremos $\mathcal{X} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{Y},\mathbb{Z})$ al retículo dual de $\mathcal{Y}$ y $W = \mathcal{X}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

DEFINICIONES 1.2. Un cono *convexo poliédrico* (o simplemente cono) de V es un conjunto de la forma $\mathcal{C} = \{a_1v_1+\cdots+a_sv_s \mid a_i\in\mathbb{Q}, a_i\geq 0\}$, donde $\{v_1,\dots,v_s\}$ es un conjunto finito de elementos de V que llamamos generadores de $\mathcal{C}$.

La *dimensión de un cono* es la dimensión del espacio vectorial que genera.

Si $\mathcal{C}$ es un cono de V, su *cono dual* es $\mathcal{C}^\vee := \{\chi\in W \mid \chi(v)\geq 0\ \ \forall v\in\mathcal{C}\}$.

Si $\mathcal{C}$ es un cono poliédrico. Entonces $\mathcal{C}^\vee\subset W$ es un cono poliédrico, generado por elementos de $\mathcal{C}^\vee\cap\mathcal{X}$. Mas aún, $(\mathcal{C}^\vee)^\vee = \mathcal{C}$.

DEFINICIONES 1.3. Si $\mathcal{C}$ es un cono poliédrico, un subconjunto $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$ es una *cara de* $\mathcal{C}$ si existe $\chi\in\mathcal{C}^\vee$ tal que $\mathcal{C}' = \{v\in\mathcal{C}\mid\chi(v)=0\}$.

Una cara de un cono es un *rayo extremal* (o arista) si es una cara de dimensión uno.

El *interior relativo* de un cono $\mathcal{C}$ es el conjunto $\mathcal{C}^\circ = \{v\in\mathcal{C}\mid\chi(v)>0\ \forall\chi\in\mathcal{C}^\vee\setminus\mathcal{C}^\perp\}$, donde $\mathcal{C}^\perp = \{\chi\in\mathcal{C}^\vee\mid\chi(v)=0\ \forall v\in\mathcal{C}\}$.

Toda cara de un cono es un cono y todo cono tiene un número finito de caras. La intersección de caras de un cono en una cara del cono. Toda cara de una cara de un cono $\mathcal{C}$ es también una cara de $\mathcal{C}$.

Mas aún, si $\mathcal{C}$ es un cono, toda cara $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ es un cono y está definida por un elemento del semigrupo $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$, es decir $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \{\chi = 0\}$, con $\chi \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$.

Además el semigrupo $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ es saturado, i.e. si $a\chi \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$, con $\chi \in \mathcal{X}$ y $0 \leq a \in \mathbb{Z}$, entonces $\chi \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$.

Proposición 1.15. *(Lema de Gordan) Si $\mathcal{C}$ es un cono poliédrico racional, entonces $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ es un semigrupo finitamente generado.*

Demostración: Ver por ejemplo [**6**] □

Proposición 1.16. *Si $\mathcal{C}$ es un cono poliédrico racional, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ no contiene ningún subespacio vectorial no trivial.*
2. *$\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$, donde $-\mathcal{C} = \{-v \in V \mid v \in \mathcal{C}\}$.*
3. *Existe $\chi \in \mathcal{C}^\vee$ tal que $\mathcal{C} \cap \{\chi\}^\perp = \{0\}$.*
4. *$\mathcal{C}^\vee$ genera a W.* □

Definición 1.12. Un cono $\mathcal{C}$ es estrictamente convexo si satisface alguna de las condiciones de la proposición anterior.

Si $\mathcal{C}$ es estrictamente convexo, entonces $\mathcal{C}^\vee$ genera a W. Luego $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ genera a $\mathcal{X}$ como grupo.

CAPíTULO 2

Variedades esféricas

1. Definiciones y ejemplos

Se recuerda que G es un grupo algebraico afín reductivo conexo, $B = TU$ es un subgrupo de Borel de G, donde T es un toro maximal y U un subgrupo unipotente maximal de G. Si $H \subset G$ es un subgrupo cerrado, notaremos π a la proyección canónica $\pi : G \to G/H$.

DEFINICIÓN 2.1. Diremos que un espacio homogéneo G/H es *esférico* (o que H *es esférico* en G) si algún subgrupo de Borel de G tiene una órbita abierta en G/H, para la acción por traslación a izquierda de B en G/H.

Una G-variedad irreducible X es una *variedad esférica* si es normal y algún subgrupo de Borel de G tiene una órbita abierta en X.

Si X es una variedad esférica y Bx es la órbita abierta en X, entonces $X = \overline{Bx} \subset \overline{Gx}$, de donde Gx es una G-órbita abierta en X. Luego toda variedad esférica X contiene como abierto a $Gx \simeq G/G_x$, que es un espacio homogéneo esférico.

OBSERVACIÓN 2.1. Como todos los subgrupos de Borel de G son conjugados, si un subgrupo de Borel tiene una órbita abierta en una variedad X, entonces todos los subgrupos de Borel tienen una órbita abierta en X. Luego si G/H es esférico, existe un subgrupo de Borel B tal que la órbita abierta de G/H es BeH; de donde se deduce que G/H es esférico si y sólo si existe un subgrupo de Borel B de G tal que BH es abierto en G.

OBSERVACIÓN 2.2. Si X es una variedad esférica, entonces ${}^B\Bbbk(X) = \Bbbk$. En efecto, si $Bx \subset X$ es la órbita abierta, entonces $\Bbbk(X) = \Bbbk(Bx)$. Luego, si $f \in \Bbbk(X) = \Bbbk(Bx)$ es una función racional invariante para la acción de B, tenemos que $f(bx) = b^{-1} \cdot f(x) = f(x)$, i.e. f es constante.

DEFINICIÓN 2.2. Sea X una G-variedad normal y $x \in X$. Diremos que el par (X, x) es una *inmersión* de G/H con punto base x, si $H = G_x$ y $\overline{Gx} = X$, es decir G/H es isomorfo a la órbita Gx y ésta es abierta en X.

Tenemos entonces una inmersión abierta $\varphi : G/H \to X$ tal que $\varphi(G/H) = Gx$, que induce un isomorfismo $\varphi^* : \Bbbk(X) \to \Bbbk(G/H)$. Cuando el contexto sea claro consideraremos a φ como una inclusión.

TEOREMA 2.1. *Si B es un subgrupo de Borel de G y X es una inmersión de G/H, entonces las siguientes propiedades son equivalentes y caracterizan a las inmersiones esféricas de G/H.*

1. *B tiene una órbita abierta en X.*
2. *B tiene un número finito de órbitas en X.*
3. *B tiene un número finito de órbitas en G/H.*
4. *Para todo G-módulo racional simple M y para todo caracter χ de H, se tiene que* $\dim M_\chi^{(H)} \leq 1$.

Demostración: Ver por ejemplo [**4**] o [**3**]. □

Debido a la propiedad 4 propiedad se les llama “sin multiplicidad” a los espacios homogéneos esféricos.

Observación 2.3. Se deduce del teorema 2.1, que toda G-variedad esférica tiene un número finito de G-órbitas.

Por otro lado, si X es G-variedad esférica y $z \in X$, entonces $\overline{Gz}$ es una variedad esférica, ya que contiene un número finito de B-órbitas.

Ejemplos 2.1.

1. Si $U \subset G$ es un subgrupo unipotente maximal de G, entonces G/U es esférico. En efecto, si B es un subgrupo de Borel tal que $B = TU$, la descomposición de Bruhat (ver por ejemplo [**9**]) asegura que B^-B es abierto en G, luego B^-U es un abierto de G.
2. Del ejemplo anterior se deduce que todo subgrupo cerrado H de G que contenga a U, es esférico en G. En este caso se dice que G/H es una variedad horosférica.
3. En particular G/P, donde P es un subgrupo parabólico de G, es un espacio homogéneo esférico. En efecto, como P es parabólico contiene un subgrupo de Borel B de G, por lo tanto $U \subset B \subset P$ y G/P es una variedad horosférica.
4. Si M es un G-módulo racional de dimensión finita y m es un vector maximal de M para la acción de B (ver definición 1.10), entonces Gm es esférico. En efecto, $Gm \simeq G/G_m$ y $U \subset G_m$.
5. Si G es un toro, entonces $B = G$ y $\{e\}$ es esférico en G, i.e. G es una variedad esférica. Las variedades tóricas –variedades normales donde un toro T actúa con una órbita abierta–, son variedades esféricas.
6. Todo grupo reductivo G es esférico, considerado como espacio homogéneo sobre $G \times G$ del siguiente modo: consideramos la acción de $G \times G$ en G dada por $(a_1, a_2) \cdot g = a_1 g a_2^{-1}$, entonces $(G \times G)_e = \Delta(G) = \{(a_1, a_2) \in G \times G \mid a_1 = a_2\}$ y $G = (G \times G) \cdot e \simeq (G \times G)/\Delta(G)$. La descomposición de Bruhat asegura que el subgrupo de Borel $(B^- \times B)$ de $G \times G$ tiene una órbita abierta en G.
7. Los espacios homogéneos de la forma G/H, donde H es el grupo de puntos fijos de un automorfismo de G de orden dos, son variedades esféricas (ver [**15**]). Estas variedades se llaman variedades simétricas y producen múltiples ejemplos de espacios homogéneos esféricos. El ejemplo anterior –$(G \times G)/\Delta(G)$–, es un espacio homogéneo simétrico.

   Los ejemplos siguientes son variedades simétricas:
8. En $G = GL_n(\mathbb{k})$, consideremos O_n el grupo de matrices ortogonales. Consideremos el siguiente endomorfismo de G: $\tau : G \to G$ tal que $\tau(a) = (a^t)^{-1}$. Es claro que τ es un automorfismo de orden dos y el conjunto de sus puntos fijos es O_n. Así GL_n/O_n es un espacio homogéneo esférico.
9. En $G = GL_{2n}(\mathbb{k})$, consideremos el grupo simpléctico $Sp_{2n}(\mathbb{k})$. Es decir el grupo que consiste de las matrices $a \in G$ tales que $a^t M a = M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Podemos ver a $Sp_{2n}(\mathbb{k})$ como el grupo de puntos fijos del automorfismo $\sigma : G \to G$ definido por $\sigma(a) = M^{-1}(a^t)^{-1}M$. Luego $Sp_{2n}(\mathbb{k})$ es esférico en $GL_{2n}(\mathbb{k})$.

2. Herramientas para la clasificación

En esta sección reunimos las herramientas necesarias para la clasificación de inmersiones esféricas de un espacio homogéneo esférico G/H.

En la subsección 2.1 definiremos y estudiaremos las valuaciones G-invariantes de una inmersión esférica.

En la subsección 2.2 estudiaremos la estructura de inmersiones esféricas de G/H, veremos que dicho estudio puede reducirse al estudio de variedades con una única órbita cerrada –inmersiones simples– y luego nos centraremos en el estudio de la estructura de las inmersiones simples.

En la subsección 2.3 describiremos $\mathcal{X}(G/H)$, el retículo de los pesos de B en $\Bbbk(G/H)$, y mostraremos cómo ver a las valuaciones como elementos de retículo dual de $\mathcal{X}(G/H)$.

En lo que sigue, consideraremos la acción de G en sí mismo –y la de B en G– por traslaciones a izquierda. H denotará siempre un subgrupo esférico de G y la acción de H en G será por traslaciones a derecha; X será una G-variedad normal irreducible.

Consideraremos la acción de G (y en particular la de B) en $\Bbbk(X)$ por izquierda dada por: $(c \cdot f)(x) = f(c^{-1}x)$ para todo $c, x \in G$ y para toda $f \in \Bbbk(X)$. Por otro lado, consideraremos la acción de H por derecha en $\Bbbk(G)$ dada por : $(f \cdot a)(x) = f(xa^{-1})$ para todo $a \in H$, $x \in G$ y para toda $f \in \Bbbk(G)$.

Cuando el contexto sea claro identificaremos $\Bbbk(G/H)$ con $\Bbbk(G)^H$ –recordar que la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ induce un isomorfismo $\pi^* : \Bbbk(G/H) \to \Bbbk(G)^H$–.

Supondremos a partir de ahora que $\Bbbk[G]$ es un dominio de factorización única. Esta hipótesis no es restrictiva, ya que para todo grupo algebraico G existe un revestimiento finito $p : \tilde{G} \to G$ tal que $\Bbbk[\tilde{G}]$ es un dominio de factorización única (proposición 1.10). Sea $\tilde{H} = p^{-1}(H) \subset \tilde{G}$, entonces podemos identificar las inmersiones de G/H con las inmersiones de $\tilde{G}/\tilde{H}$.

2.1. Valuaciones invariantes. Damos aquí la definición de valuación G-invariante de una G-variedad X. Estas valuaciones serán los objetos geométricos que nos permitirán clasificar a las variedades esféricas.

Por otro lado estudiamos la correspondencia entre valuaciones G-invariantes de G y de G/H: el mapa inyectivo $\pi^* : \Bbbk(G/H) \to \Bbbk(G)$ induce una correspondencia entre valuaciones de G y valuaciones de G/H –dada por $\nu \mapsto \nu \circ \pi^*$–, probaremos (corolario 2.1) que esta correspondencia es sobreyectiva, i.e. toda valuación invariante de G/H se "extiende" a una valuación invariante de G.

Luego desarrollamos herramientas que nos permitirán deducir propiedades de las funciones racionales de X a partir de propiedades de B-vectores propios de $\Bbbk(X)$ (i.e. elementos del retículo $\mathcal{X}(X) \simeq \mathcal{X}(G/H)$) y recíprocamente (proposición 2.3).

Definición 2.3. Sea X una G-variedad normal y ν una valuación de X. Decimos que ν es *G-invariante* si $\nu(a \cdot f) = \nu(f)$ para todo $a \in G$ y $f \in \Bbbk(X)^*$.

Notaciones 2.1. Notaremos $\mathcal{V}(X)$ al conjunto de valuaciones G-invariantes de X, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G/H)$ y $\mathcal{V}(G)$ al conjunto de valuaciones G-invariantes de G.

Si (X, x) es una inmersión esférica de G/H y $\varphi : G/H \to X$ es la inmersión abierta tal que $\varphi(eH) = x$, tenemos un isomorfismo $\varphi^* : \Bbbk(X) \to \Bbbk(G/H)$. Este isomorfismo induce una correspondencia biyectiva dada por $\nu \mapsto \nu \circ \varphi^*$, entre valuaciones de G/H y valuaciones de X. Cuando no haya lugar a confusiones identificaremos las valuaciones de G/H con valuaciones de X sin mencionar esta correspondencia.

Observación 2.4. Si $\nu \in \mathcal{V}(X)$ y tiene centro, éste es G-estable. Recíprocamente, si $Z \subset X$ es subvariedad cerrada y G-estable, entonces es el centro de una valuación G-invariante (ver por ejemplo [**10**]).

Proposición 2.1. *Sea ν una valuación de G. Entonces existe una única valuación $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ tal que $\bar{\nu}(f) = \nu(a \cdot f)$ para toda $f \in \Bbbk(G)^*$ y para todo $a \in U_f$, donde U_f es un abierto no vacío de G.*

Explícitamente, si $f \in \Bbbk[G] \setminus \{0\}$*, entonces* $\bar{\nu}(f) = \text{mín}\{\nu(a \cdot f) \mid \ a \in G\}$*.*

Demostración: Sea $f \in \Bbbk[G] \setminus \{0\}$ y $M \subset \Bbbk[G]$ el G-submódulo generado por f. Como M tiene dimensión finita, existe un entero n_1 tal que $\nu(h) \geq n_1$ para todo $h \in M \setminus \{0\}$. Sea n_f el entero maximal para esta propiedad y $N = \{h \in M \mid \nu(h) > n_f\}$. Entonces N es un subespacio vectorial propio de M.

Observemos que el conjunto $U_f = \{a \in G \mid a \cdot f \notin N\} \subset G$ es no vacío (si lo fuera n_f no sería maximal) y abierto, ya que es la preimagen del abierto $M \setminus N \subset M$ por el mapa de órbitas $a \mapsto a \cdot f$. Mas aún, $a \in U_f$ si y sólo si $\nu(a \cdot f) = n_f$.

Si $f \in \Bbbk[G]$, definimos $\bar{\nu}(f) = n_f = \nu(a \cdot f)$ para todo $a \in U_f$.

Si $g = \frac{h_1}{h_2} \in \Bbbk(G)^*$, con $h_1, h_2 \in \Bbbk[G] \setminus \{0\}$, definimos $\bar{\nu}(g) = \bar{\nu}(h_1) - \bar{\nu}(h_2)$.

Probemos que $\bar{\nu}$ es una valuación G-invariante:

Sean $f, h \in \Bbbk(G) \setminus \{0\}$ tales que $f + h \neq 0$, si $a \in U_f \cap U_h \cap U_{f+h}$, entonces $\bar{\nu}(f + h) = \nu(a \cdot (f + h)) = \nu((a \cdot f) + (a \cdot h)) \geq \text{mín}\{\nu(a \cdot f), \nu(a \cdot h)\} = \text{mín}\{\bar{\nu}(f), \bar{\nu}(h)\}$.

Sean $f, h \in \Bbbk(G) \setminus \{0\}$, si $a \in U_f \cap U_h \cap U_{fh}$, entonces $\bar{\nu}(fh) = \nu(a \cdot fh)$, de donde $\bar{\nu}(fh) = \nu((a \cdot f)(a \cdot h)) = \nu(a \cdot f) + \nu(a \cdot h) = \bar{\nu}(f) + \bar{\nu}(h)$.

Es claro que $\bar{\nu}$ es nula sobre $\Bbbk^*$.

Observemos además que para todo $a \in G$ vale $(U_{a \cdot f})a = U_f$. Luego, si $c \in U_{a \cdot f}$, entonces $\bar{\nu}(a \cdot f) = \nu(ca \cdot f) = \bar{\nu}(f)$.

Por construcción, si $f \in \Bbbk[G] \setminus \{0\}$, $\bar{\nu}(f) = \text{mín}\{\nu(a \cdot f) \mid a \in G\}$. □

Observación 2.5. La proyección $\pi : G \to G/H$ induce una extensión de cuerpos $\pi^* : \Bbbk(G/H) \to \Bbbk(G)$, por lo que toda valuación en $\mathcal{V}(G)$ induce una valuación en $\mathcal{V}(G/H)$ mediante restricción a $\Bbbk(G/H)$. Explícitamente, si $\nu \in \mathcal{V}(G)$, entonces $\nu \circ \pi^* \in \mathcal{V}(G/H)$. Recíprocamente, el corolario siguiente nos permite extender toda valuación perteneciente a $\mathcal{V}(G/H)$ a una valuación en $\mathcal{V}(G)$.

Corolario 2.1. *Si* H *es un subgrupo de* G *y* $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$*, existe* $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ *tal que* $\nu = \bar{\nu} \circ \pi^*$*.*

Demostración: Tenemos una extensión de cuerpos $\pi^* : \Bbbk(G/H) \hookrightarrow \Bbbk(G)$, luego existe una valuación $\bar{\nu}$ de G que extiende a ν (ver proposición 1.7), que podemos suponer G-invariante gracias a la proposición 2.1. □

Proposición 2.2. *Sean* $f \in \Bbbk[G]$ *y* M *el* G*-submódulo de* $\Bbbk[G]$ *generado por* f*. Entonces para toda* $\nu \in \mathcal{V}(G)$ *se cumple que:*

$$\nu(f) = \text{mín}\{\nu(h) \ \mid \ h \in {}^{(B)}M\} \setminus \{0\}.$$

Demostración: Si $h \in M \setminus \{0\}$, entonces $\nu(h) \geq \text{mín}\{\nu(a \cdot f) \mid a \in G\} = \nu(f)$, luego $\nu(f) \leq \text{mín}\{\nu(h) \ \mid \ h \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$.

Como M está generado -como G-módulo- por ${}^{(B)}M$ (ver corolario 1.2) tenemos que $f = \sum_{a \in G} \sum_{i=1}^{n} a \cdot f_i$, donde $f_i \in {}^{(B)}M$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de donde deducimos que $\nu(f) \geq \text{mín}\{\nu(a \cdot f_i) \mid a \in G, i = 1, \ldots, n\} = \text{mín}\{\nu(f_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ y por lo tanto $\nu(f) \geq \text{mín}\{\nu(h) \mid h \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$. □

Corolario 2.2. *Sean* $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$, $f \in \Bbbk(G)^H$ *y* $h \in {}^{(B)}\Bbbk(G)^{(H)}$ *tales que* $fh \in \Bbbk[G]$*. Si* $M \subset \Bbbk[G]$ *es el* G*-submódulo generado por* fh*, entonces* $Mh^{-1} \subset \Bbbk(G)^H$ *y* $\nu(f) = \text{mín}\{\nu(\frac{f'}{h}) \ \mid \ f' \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$*.*

Demostración: Como las acciones de G y de H en $\Bbbk(G)$ conmutan, los elementos de M son vectores propios para H, de igual peso que h, luego $Mh^{-1} \subset \Bbbk(G)^H = \Bbbk(G/H)$.

Por el corolario 2.1, ν se puede extender a $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ y por la proposición anterior aplicada a $\bar{\nu}$ y a fh tenemos $\bar{\nu}(fh) = \min\{\bar{\nu}(f') \mid f' \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$. Luego, $\nu(f) = \bar{\nu}(fh) - \bar{\nu}(h) = \min\{\bar{\nu}(f') \mid f' \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\} - \bar{\nu}(h) = \min\{\nu(\frac{f'}{h}) \mid f' \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$. □

Suponemos de ahora en más que G/H es un espacio homogéneo esférico con punto base $x = eH$.

Definición 2.4. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G/H)$ el conjunto de divisores primos B-estables de G/H; los elementos de $\mathcal{D}$ se llaman *colores* de G/H.

Como G/H es esférico, tiene un número finito de B-órbitas, luego $\mathcal{D}$ es un conjunto finito. Por otro lado, para cada $D \in \mathcal{D}$, ν_D es una valuación B-invariante de G/H.

Proposición 2.3. *Sea $f_0 \in \Bbbk[BH/H]$ y $\nu_0 \in \mathcal{V}$. Entonces existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ tal que:*

- $\nu_0(f) = \nu_0(f_0)$.
- $\nu(f) \geq \nu(f_0)$, $\forall \nu \in \mathcal{V}$.
- $\nu_D(f) \geq \nu_D(f_0)$, $\forall D \in \mathcal{D}$.

Demostración: Recordemos que estamos suponiendo que $\Bbbk[G]$ es un dominio de factorización única. Entonces todo divisor de G es un divisor principal (proposición 1.6).

En el caso en que $\nu_Z(\pi^*(\frac{1}{f_0})) = 0$, para todo Z divisor B-estable de G, tenemos que $\nu_Z(\pi^*(f_0)) = 0$ para todo divisor Z tal que $Z \subset G \setminus BH$, de donde deducimos que $\pi^*(f_0) \in \Bbbk[G]^H$ (corolario 1.1). En ese caso, la proposición 2.2 aplicada a $\pi^*(f_0)$ y a una extensión $\bar{\nu_0} \in \mathcal{V}(G)$ de ν_0, asegura que existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^H$ tal que $\nu_0(f_0) = \bar{\nu_0}(\pi^*(f_0)) = \bar{\nu_0}(f) = \nu_0(f)$ y si $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$, entonces $\bar{\nu}(\pi^*(f_0)) = \min\{\bar{\nu}(h) \mid h \in {}^{(B)}M \setminus \{0\}\}$, donde M es el G-módulo generado por $\pi^*(f_0)$. Deducimos entonces que $\bar{\nu}(\pi^*(f_0)) \leq \bar{\nu}(f)$ para toda $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$. Luego, si $\nu \in \mathcal{V}$ y $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ extiende a ν, tenemos que $\nu(f_0) = \bar{\nu}(\pi^*(f_0)) \leq \bar{\nu}(f) = \nu(f)$.

Si $D \in \mathcal{D}$, afirmamos que $\nu_D(f_0) = 0$. En efecto, si $\nu_D(f_0) \neq 0$, existe una componente irreducible Z (B-estable) de $\pi^{-1}(D)$ tal que $\nu_Z(\pi^*(f_0)) \neq 0$. Por otro lado, observemos que $\nu_D(f) \geq 0$, ya que $f \in \Bbbk[G]^H$, luego $\nu_D(f) \geq \nu_D(f_0)$.

En el caso en que existen divisores primos B-estables de G tales que $\nu_Z(\pi^*(\frac{1}{f_0})) \neq 0$, i.e. el divisor de $\pi^*(\frac{1}{f_0})$ tiene parte B-estable, usando la proposición 1.11 podemos construir $h \in {}^{(B)}\Bbbk(G)^{(H)}$ de modo que el divisor de h sea exactamente la parte B-estable del divisor de $\pi^*(\frac{1}{f_0})$. Luego $\nu_Z(\pi^*(\frac{1}{f_0})) = \nu_Z(h)$ para todo divisor B-estable de G.

Afirmamos que $\pi^*(f_0)h \in \Bbbk[G]$. En efecto, observemos que como h es $(B \times H)$-vector propio, es regular en BH, luego $\pi^*(f_0)h \in \Bbbk[BH]$. Además si $Z \subset G \setminus BH$ es un divisor B-estable de G, entonces $\nu_Z(\pi^*(f_0)h) = 0$ por construcción de h. Luego, el corolario 1.1 asegura que $\pi^*(f_0)h \in \Bbbk[G]$.

Sea M el G-submódulo de $\Bbbk[G]$ generado por $\pi^*(f_0)h$; el corolario 2.2 aplicado a $\pi^*(f_0)$ y a h asegura que existe $f' \in {}^{(B)}M$ tal que: $\frac{f'}{h} \in \Bbbk(G)^H$ y $\nu_0(\pi^*(f_0)) = \nu_0(\frac{f'}{h})$. Probaremos que $f := \frac{f'}{h} \in {}^{(B)}\Bbbk(G)^H$ satisface lo requerido.

Sea $\nu \in \mathcal{V}$ y $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ una extensión de ν a $\Bbbk(G)$. La proposición 2.2 aplicada a $\pi^*(f_0)h$ asegura que $\bar{\nu}(\pi^*(f_0)h) \leq \bar{\nu}(f')$, entonces $\nu(f_0) = \bar{\nu}(\pi^*(f_0)h) - \bar{\nu}(h) \leq \bar{\nu}(f') - \bar{\nu}(h) = \nu(\frac{f'}{h})$.

Por último, si $D \in \mathcal{D}$ y $\nu_D(f_0) > \nu_D(f)$, entonces $\nu_D(\frac{f_0}{f}) > 0$ y $\frac{f_0}{f}$ tiene un cero a lo largo de D. Entonces existe una componente irreducible Z de $\pi^{-1}(D)$ tal que $\nu_Z(\frac{\pi^*(f_0)}{f}) > 0$; luego $\nu_Z(\pi^*(f_0)) > \nu_Z(f) = \nu_Z(f') - \nu_Z(h) \geq -\nu_Z(h)$ -esta última desigualdad se debe a que $f' \in \Bbbk[G]$-. Hemos encontrado entonces un divisor B-estable $Z \subset G$ tal que $\nu_Z(\pi^*(f_0)h) > 0$, lo que contradice la elección de h.

$\square$

2.2. Variedades esféricas simples. Mostraremos en esta subsección que toda variedad esférica X es unión de G-variedades esféricas simples, que son abiertos de X (lema 2.1). Luego analizaremos la estructura de las variedades simples. Probaremos que si X es una variedad esférica simple de órbita cerrada Y, entonces existe un abierto afín, B-estable (que notaremos X_0) que corta a todas las órbitas de la variedad. Luego $X = GX_0$, es decir que podemos cubrir a X por trasladados de estos abiertos afines. Además X_0 contiene a la B-órbita abierta Bx de X y $X_0 \setminus Bx$ es unión de divisores B-estables que contienen a Y. Esta última propiedad es la que nos permite asociarle objetos combinatorios a las variedades simples –le asociaremos una valuación del cuerpo $\Bbbk(X)$ a cada divisor de $X_0 \setminus Bx$–.

Definición 2.5. Una G-variedad se dice *simple* si contiene una única G-órbita cerrada.

Lema 2.1. *Toda G-variedad esférica se puede recubrir por G-variedades esféricas simples.*

Demostración: Sea X una G-variedad esférica e Y una G-órbita de X, definamos

$$X_{Y,G} := \{z \in X \mid Y \subset \overline{Gz}\}.$$

Entonces $X = \bigcup X_{Y,G}$, donde Y recorre todas las G-órbitas de X. Es claro que $X_{Y,G}$ es G-estable. Para probar que $X_{Y,G}$ es abierto en X es suficiente mostrar que $X \setminus X_{Y,G} = \bigcup_y \overline{Gy}$, con $y \in X \setminus X_{Y,G}$. En efecto, como X es esférica, esta unión es finita, por lo que $X \setminus X_{Y,G}$ es cerrado en X. Sea $z \in \overline{Gy}$ con $y \in X \setminus X_{Y,G}$, entonces $\overline{Gz} \subset \overline{Gy}$, luego $z \in X \setminus X_{Y,G}$.

Si Bx es la B-órbita abierta de X, entonces $Y \subset \overline{Gx} = \overline{Bx} = X$, en particular $Bx \subset X_{Y,G}$. Luego $X_{Y,G}$ es una variedad esférica.

Además $X_{Y,G}$ contiene a Y como única órbita cerrada: sea Gz una órbita cerrada de $X_{Y,G}$, entonces $Y \subset \overline{Gz} \cap X_{Y,G} = Gz$, luego $Y = Gz$. $\square$

Notación 2.1. Si X una G-variedad esférica simple, con órbita cerrada Y, definimos

$$X_{Y,B} := \{z \in X \mid Y \subset \overline{Bz}\}.$$

Proposición 2.4. *Sea X una G-variedad esférica simple, con órbita cerrada Y. Entonces $X_{Y,B}$ es un abierto B-estable de X. En particular, $X_{Y,B}$ contiene a la B-órbita abierta de X.*

Para todo $z \in X$, $X_{Y,B} \cap Gz$ contiene a la B-órbita abierta de $\overline{Gz}$. En particular, la B-órbita abierta de Y está incluida en $X_{Y,B} \cap Y$ y es la única B-órbita cerrada de $X_{Y,B}$.

Demostración: Como B tiene un número finito de órbitas en X, usando el mismo argumento de la prueba del lema 2.1 se muestra que $X_{Y,B}$ es abierto en X.

Sea $z \in X$, como Y es la única órbita cerrada de X, tenemos que $Y \subset \overline{Gz}$. Sea By la B-órbita abierta de $\overline{Gz}$, entonces $\overline{By} = \overline{Gz}$, luego $Y \subset \overline{By}$, esto es $By \subset X_{Y,B} \cap \overline{Gz}$. Por otro lado, By y Gz son abiertos de $\overline{Gz}$, por lo tanto se cortan y $By \subset X_{Y,B} \cap Gz$.

Sean Y_B° la B-órbita abierta de Y y $z \in X_{Y,B}$ tal que Bz es cerrado en $X_{Y,B}$. Entonces $Y_B^\circ \subset Y \cap X_{Y,B} \subset \overline{Bz} \cap X_{Y,B} = Bz$, de donde $Y_B^\circ = Bz$. $\square$

Notación 2.2. Sea X una variedad esférica simple de órbita cerrada Y. Notaremos $\mathcal{D}(X)$ al conjunto (finito) de divisores B-estables de X y $\mathcal{D}_Y(X) \subset \mathcal{D}(X)$ al conjunto de los divisores que contienen a Y.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea X una variedad esférica simple con órbita cerrada Y. Sea $X_0 := X \setminus \bigcup D$, donde D recorre el conjunto $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$. Entonces:*

1. *X_0 es un abierto afín B-estable de X;*
2. *$X_{Y,B} \subset X_0$, en particular X_0 contiene a la B-órbita abierta de X y corta a toda G-órbita de X (i.e. $X = GX_0$);*
3. *$X_0 \cap Y = X_{Y,B} \cap Y = Y_B^\circ$.*

Demostración:

1. Sea $X_1 \subset X$ el abierto afín B-estable dado por la proposición 1.13. Como X_1 es afín, $X \setminus X_1$ es unión de divisores B-estables. Mas aún, éstos divisores no contienen a Y (si $Y \subset D$, entonces $Y \subset X \setminus X_1$, pero $Y \cap X_1 \neq \emptyset$). Luego $X_0 = X_1 \setminus \bigcup D$, donde D recorre los divisores B-estables de X_1 tales que $Y \not\subset \overline{D}^X$.

   Además, la B-órbita abierta de X está contenida en X_1, ya que si $x \notin X_1$, entonces $\overline{Bx} \subset X \setminus X_1$.

   Sea $\nu_0 \in \mathcal{V}(X)$ la valuación asociada a Y. Como X_1 es afín, existe $f_0 \in \Bbbk[X_1]$ tal que $\nu_0(f_0) = 0$ y $\nu_D(f_0) > 0$ para todo D divisor B-estable de X_1 tal que $Y \not\subset \overline{D}^X$ (i.e $X_1 \setminus X_0 \subset \{f_0 = 0\}$). Además, por la proposición 2.3 podemos suponer que $f_0 \in {}^{(B)}\Bbbk[X_1]$.

   Afirmamos que $X_0 = \{z \in X_1 \mid f_0(z) \neq 0\}$, luego X_0 es afín. En efecto, es claro que si $z \in X_1$ y $f_0(z) \neq 0$, entonces $z \in X_0$. Para probar la otra inclusión observemos que si D es un divisor B-estable de X_1 tal que $D \cap X_0 \neq \emptyset$, entonces $Y \subset \overline{D}^X$, luego $Y \cap X_1 \subset \overline{D}^X \cap X_1 = D$ y por lo tanto $m_{\nu_D} \subset m_{\nu_0}$. Si $z \in X_0$ y $f_0(z) = 0$, existe un divisor D de X_0 tal que $\nu_D(f_0) > 0$, de donde $f_0 \in m_{\nu_0}$ y $\nu_0(f_0) > 0$, lo que contradice nuestra elección de f_0. Hemos probado entonces que X_0 es afín y $\Bbbk[X_0] = \Bbbk[X_1]_{f_0}$.
2. Si $z \in X \setminus X_0$, entonces $\overline{Bz} \subset X \setminus X_0$, luego $Y \not\subset \overline{Bz}$ y $z \notin X_{Y,B}$.
3. Probaremos que si $f_1 \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0 \cap Y]$ y f_1 es no nula, entonces f_1 es invertible en $X_0 \cap Y$: si $f_1 \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0 \cap Y]$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_0^n f_1 \in {}^{(B)}\Bbbk[X_1 \cap Y]$ y por nuestra elección de X_1 (proposición 1.13) existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_1]$ tal que $f_{|X_1 \cap Y} = f_0^n f_1$. Afirmamos que $f_{|X_0}$ es invertible, luego f_1 es invertible. En efecto, si $f_{|X_0}$ no es invertible existe un divisor B-estable D de X_0 tal que $f \in m_{\nu_D}$; como ya observamos antes, en ese caso $m_{\nu_D} \subset m_{\nu_0}$, luego $f \in m_{\nu_0}$ y f se anula en $Y \cap X_0$. Pero como f_0 no tiene ceros en Y, deducimos que f_1 es nula en $X_0 \cap Y$, lo que contradice nuestra elección de f_1. Luego $f_{|X_0}$ –y por lo tanto f_1– es invertible.

   Por 2) tenemos que $Y_B^\circ \subset X_{Y,B} \cap Y \subset X_0 \cap Y$. Si $Y_B^\circ \subsetneq X_0 \cap Y$, consideramos el cerrado B-estable $(X_0 \cap Y) \setminus Y_B^\circ$ y sea $I \subset \Bbbk[X_0 \cap Y]$ su ideal. Por el teorema de Lie-Kolchin, existe $f \in I$ tal que $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0 \cap Y]$ y $f_{|X_0 \cap Y \setminus Y_B^\circ} = 0$, pero ya probamos que en ese caso f es invertible. Luego $Y_B^\circ = X_0 \cap Y$, de donde $Y_B^\circ = X_{Y,B} \cap Y = X_0 \cap Y$.

□

OBSERVACIÓN 2.6. Si $X = G/H = Y$ y BH/H es la B-órbita abierta de G/H, entonces $BH/H = Y_B^\circ = X_0 \cap Y = X_0$. Luego BH/H es afín y $(G/H) \setminus (BH/H)$ es unión de los divisores primos B-estables de G/H.

2.3. El retículo $\mathcal{X}(\mathbf{G/H})$. Sea G/H un espacio homogéneo esférico. En esta sección centramos nuestra atención en el retículo $\mathcal{X}(G/H)$, formado por los pesos de B en $\Bbbk(G/H)$, y mostramos cómo asociar a una valuación de G/H un morfismo de grupos de $\mathcal{X}(G/H)$ en $\mathbb{Z}$.

OBSERVACIÓN 2.7. Observemos que el conjunto ${}^{(B)}\Bbbk(G/H) \setminus \{0\}$, formado por los B-vectores propios de $\Bbbk(G/H)$ es un subgrupo abeliano del grupo multiplicativo de $\Bbbk(G/H)$.

Sea $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G/H)$ el conjunto de pesos de B en $\Bbbk(G/H)$. Entonces $\mathcal{X}(G/H) \subset \mathcal{X}(B)$ es un subretículo de $\mathcal{X}(B)$. Mas aún, el mapa ${}^{(B)}\Bbbk(G/H) \to \mathcal{X}(G/H)$ dado por $f \mapsto \chi_f$ es un epimorfismo de grupos, cuyo núcleo es ${}^{B}\Bbbk(G/H)$, que por ser G/H esférico se reduce a $\Bbbk^*$ (ver observación 2.1).

Obtenemos entonces una sucesión exacta de grupos:

$$1 \to \Bbbk^* \to {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \to \mathcal{X}(G/H) \to 0$$

Por otro lado, observemos que toda valuación ν de G/H se restringe a un homomorfismo de ${}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ en $\mathbb{Z}$ que es nulo sobre $\Bbbk^*$. Luego ν induce un homomorfismo de grupos $\rho(\nu) : \mathcal{X}(G/H) \to \mathbb{Z}$, definido por $\rho(\nu)(\chi_f) = \nu(f)$.

Definición 2.6. Notamos $V = V(G/H) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}(G/H), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Observemos que V es un espacio vectorial racional de dimensión igual al rango de $\mathcal{X}(G/H)$. Si W es el dual de V, entonces $W \simeq \mathcal{X}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

En este contexto la observación 2.7 asegura que existe un mapa ρ del conjunto de valuaciones de G/H al espacio vectorial V, dado por $\rho(\nu)(\chi_f) = \nu(f)$. El siguiente corolario nos permite identificar $\mathcal{V}$ con su imagen $\rho(\mathcal{V}) \subset V$. De ahora en más no haremos distinción entre elementos de $\mathcal{V}$ y elementos de $\rho(\mathcal{V})$.

Corolario 2.3. *La restricción del mapa ρ a $\mathcal{V}$ es inyectiva.*

Demostración: Como BH/H es un abierto afín de G/H (ver observación 2.6), toda valuación en $\mathcal{V}$ queda determinada por su restricción a $\Bbbk[BH/H]$. Sean $\nu, \nu' \in \mathcal{V}$ tales que $\nu \neq \nu'$, entonces existe $f \in \Bbbk[BH/H]$ tal que $\nu(f) \neq \nu'(f)$, supongamos que $\nu(f) < \nu'(f)$. La proposición 2.3 aplicada a ν asegura que existe $g \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ tal que $\nu(g) = \nu(f)$ y $\nu'(g) \geq \nu'(f)$ para toda $\nu' \in \mathcal{V}$. Luego $\rho(\nu')(\chi_g) > \rho(\nu)(\chi_g)$ i.e. $\rho(\nu') \neq \rho(\nu)$. $\square$

CAPíTULO 3

Clasificación de las inmersiones esféricas simples de G/H

En este capítulo estudiamos las inmersiones simples de un espacio homogéneo esférico G/H y obtenemos una biyección entre inmersiones esféricas simples de G/H y conos coloreados estrictamente convexos de $(V, \mathcal{V})$.

En la sección 1 le asociamos datos combinatorios a una inmersión esférica simple y probamos que estos datos determinan a la inmersión.

En la sección 2 definimos cono coloreado de $(V, \mathcal{V})$ y obtenemos una biyección entre conos coloreados e inmersiones simples de G/H.

1. Caracterización de las inmersiones esféricas simples

Sea X una inmersión simple de G/H; en esta sección le asociaremos a X un cono de V y un conjunto finito de elementos del retículo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$. Probaremos que estos objetos determinan –salvo isomorfismos G-equivariantes– a la inmersión (teorema 3.2). Para esto estudiaremos el conjunto $\mathcal{D}_Y(X)$ de los divisores B-estables de X que contienen a la única órbita cerrada Y de X.

Sea X_0 el abierto afín B-estable de X dado por la proposición 2.5. Como primer paso hacia la clasificación de inmersiones probaremos que las funciones regulares de este abierto pueden caracterizarse en términos de la B-órbita abierta de X y de los divisores en $\mathcal{D}_Y(X)$ (proposición 3.1). Este hecho es la clave para demostrar que la inmersión queda determinada por $\mathcal{D}_Y(X)$ (teorema 3.1).

Luego ordenaremos los datos de $\mathcal{D}_Y(X)$ en un par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ –donde $\mathcal{C}_X$ es un cono de V y $\mathcal{F}(X)$ son los divisores de $\mathcal{D}_Y(X)$ que no son G-estables (colores)– y demostraremos que este par determina a la inmersión (teorema 3.2). Una vez hecho esto, mostraremos que las funciones regulares del abierto X_0 que son B-vectores propios, son exactamente los generadores del cono dual $\mathcal{C}_X^\vee$ (teorema 3.3). Además traduciremos propiedades de las valuaciones de $\Bbbk(X)$ consideradas como tales, a propiedades de dichas valuaciones consideradas como elementos del cono $\mathcal{C}_X$.

Como en el capítulo 2, G/H denotará un espacio homogéneo esférico y (X, x) una inmersión esférica simple de G/H, de órbita cerrada $Y \subset X$. Como ya hemos observado, en este caso $Gx \simeq G/H$ es un abierto de X, luego $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(G/H)$ y $\mathcal{V}(X)$ se identifica con $\mathcal{V}$. Mas aún, el corolario 2.3 nos permite ver a $\mathcal{V}(X)$ como un subconjunto de V.

Recordemos que $X_0 = X \setminus \bigcup D$, donde D recorre el conjunto $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$.

Proposición 3.1. *Si X es una inmersión esférica simple con órbita cerrada Y y $f \in \Bbbk(X)$. Entonces $f \in \Bbbk[X_0]$ si y sólo si $f \in \Bbbk[Bx]$ y $\nu_D(f) \geq 0$ para toda $D \in \mathcal{D}_Y(X)$.*

Demostración: Probaremos que $X_0 \setminus Bx = \bigcup D \cap X_0$, donde D recorre el conjunto $\mathcal{D}_Y(X)$. Como Bx es afín, $X_0 \setminus Bx$ es unión de divisores B-estables de X_0 (proposición 1.8). Luego $X_0 \setminus Bx = \bigcup D \cap X_0$, donde D recorre los divisores de X tales que $D \cap X_0 \neq \emptyset$ y por definición de X_0, $D \cap X_0 \neq \emptyset$ si y sólo si $Y \subset D$.

Como X_0 es normal, una función $f \in \Bbbk[X_0]$ si y sólo si $f \in \Bbbk[Bx]$ y $\nu_F(f) \geq 0$ para toda F componente de $X_0 \setminus Bx$ (corolario 1.1). Luego $f \in \Bbbk[X_0]$ si y sólo si $f \in \Bbbk[Bx]$ y $\nu_D(f) = \nu_{D\cap X_0}(f) \geq 0$ para toda $D \in \mathcal{D}_Y(X)$. □

Observación 3.1. Si $D \in \mathcal{D}_Y(X)$, entonces o bien la intersección de D con el abierto $G/H \subset X$ es no vacía, o bien D es una componente irreducible de $X \setminus G/H$ y por lo tanto es G-estable. En el primer caso, $D \cap G/H \in \mathcal{D}$ no es G-estable (si lo fuera $G/H \subset D$), en el segundo D es G-estable, por lo que $\nu_D \in \mathcal{V}(X) = \mathcal{V}$. Luego, la órbita cerrada $Y \subset X$ determina dos conjuntos:

$$\mathcal{F}(X) := \{D \in \mathcal{D}_Y(X) \mid D \cap G/H \neq \emptyset\},$$

que se identifica con el conjunto de los divisores B-estables (no G-estables) de G/H que contienen Y en su clausura en X (observación 1.2) y

$$\mathcal{B}(X) := \{D \in \mathcal{D}_Y(X) \mid D \text{ es } G\text{-estable } \}.$$

A partir de ahora llamaremos indistintamente $\mathcal{F}(X)$ (respectivamente $\mathcal{B}(X)$) al conjunto de divisores en $\mathcal{F}(X)$ (respectivamente $\mathcal{B}(X)$) y al conjunto de las valuaciones asociadas a estos divisores.

Observación 3.2. Las valuaciones asociadas a divisores de $\mathcal{B}(X)$ son G-invariantes, mientras que las asociadas a divisores de $\mathcal{F}(X)$ son solamente B-invariantes.

Teorema 3.1. *Una inmersión simple (X, x) de G/H está determinada, a menos de isomorfismos G-equivariantes, por el par $D_Y(X)$.*

Demostración: Sea (X', x') otra inmersión simple de órbita cerrada Y' con iguales datos, i.e. $\mathcal{D}_Y(X)$ y $\mathcal{D}_{Y'}(X')$ vistos como subconjuntos de valuaciones de $\Bbbk(G/H)$ coinciden. Sean $\varphi_1 : G/H \to (X, x)$ y $\varphi_2 : G/H \to (X', x')$ las correspondientes inmersiones abiertas G-equivariantes. Entonces $\varphi_1(BH/H) = Bx$ y $\varphi_2(BH/H) = Bx'$. Estas inmersiones inducen isomorfismos $\varphi_1^* : \Bbbk(X) \to \Bbbk(G/H)$ y $\varphi_2^* : \Bbbk(X') \to \Bbbk(G/H)$ que satisfacen: $\varphi_1^*(\Bbbk[Bx]) = \Bbbk[BH/H]$ y $\varphi_2^*(\Bbbk[Bx']) = \Bbbk[BH/H]$.

Por otro lado, observemos que la hipótesis se traduce en:

$$\{\nu \circ \varphi_1^{*-1} \mid \nu \in \mathcal{D}_Y(X)\} = \{\nu' \circ \varphi_2^{*-1} \mid \nu' \in \mathcal{D}_{Y'}(X')\}.$$

Sea $\varphi^* = \varphi_1^{*-1}\varphi_2^*$. Observemos que si $f \in \Bbbk(X')$ es tal que $\nu'(f) \geq 0$ para toda $\nu' \in \mathcal{D}_{Y'}(X')$ y si $\nu \in \mathcal{D}_Y(X)$, entonces $\nu(\varphi^*(f)) = \nu \circ \varphi_1^{*-1}(\varphi_2^*(f)) = \nu' \circ \varphi_2^{*-1}(\varphi_2^*(f)) = \nu'(f)$, para alguna valuación ν' tal que $\nu' \in \mathcal{D}_{Y'}(X')$, luego $\nu(\varphi^*(f)) \geq 0$.

La proposición 3.1 asegura que

$$\varphi^*(\Bbbk[X_0']) = \varphi^*(\{f \in \Bbbk[Bx'] \mid \nu(f) \geq 0 \ \forall \nu \in \mathcal{D}_{Y'}(X')\}) =$$

$$\{f \in \Bbbk[Bx] \mid \nu(f) \geq 0 \ \forall \nu \in \mathcal{D}_Y(X)\} = \Bbbk[X_0],$$

de donde deducimos que φ^* es un isomorfismo entre $\Bbbk[X_0']$ y $\Bbbk[X_0]$ que podemos extender a un isomorfismo φ^* entre $\Bbbk(X')$ y $\Bbbk(X)$. Obtenemos entonces una aplicación racional G-equivariante $\varphi : X \dashrightarrow X'$ definida en X_0 y tal que $\varphi_{|X_0} : X_0 \to X_0'$ es un isomorfismo. Como $X = GX_0$ y $X' = GX_0'$, podemos extender φ –de forma G-equivariante– a un isomorfismo de X en X'. □

Queremos ahora describir todos los pares $(\mathcal{B}(X), \mathcal{F}(X))$ que aparecen asociados a inmersiones esféricas simples de G/H.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{C}_X$ el cono poliédrico de V generado por $\rho(\mathcal{F}(X))$ y $\mathcal{B}(X)$. Observar que, haciendo uso del corolario 2.3, estamos identificando $\mathcal{B}(X)$ a $\rho(\mathcal{B}(X)) \subset \mathcal{V}$.

Observación 3.3. $\mathcal{C}_X$ es un cono poliédrico racional, ya que está generado por un número finito de elementos del retículo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$.

La siguiente proposición muestra que $\mathcal{B}(X)$ puede ser recuperado a partir de $\mathcal{C}_X$ y $\rho(\mathcal{F}(X))$. Luego toda inmersión esférica simple de G/H estará determinada, a menos de isomorfismos G-equivariantes, por el par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Las semirrectas $\mathbb{Q}^+\nu$, con $\nu \in \mathcal{B}(X)$ son exactamente las aristas de $\mathcal{C}_X$ que no contienen puntos de $\rho(\mathcal{F}(X))$.*

Demostración: Sea $\nu \in \mathcal{B}(X)$ y $D \in \mathcal{D}_Y(X)$ el divisor G-estable de X tal que $\nu = \nu_D$. Como X_0 es afín, existe $f \in \Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_{D'}(f) > 0$ para todo $D' \in \mathcal{D}_Y(X)$ distinto de D y $\nu_D(f) = 0$. La proposición 2.3 asegura que existe $g \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ tal que $\nu(g) = \nu(f) = 0$ y $\nu'(g) \geq \nu'(f) > 0$ para toda $\nu' \in \mathcal{B}(X) \cup \mathcal{F}(X)$ distinta de ν. Esto es $\chi_g(\nu) = 0$ y $\chi_g(\rho(\nu')) > 0$ para toda $\nu' \in \mathcal{B}(X) \cup \mathcal{F}(X)$ distinta de ν.

Hemos obtenido $\chi_g \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbb{Q}^+\nu = \mathcal{C}_X \cap \{\chi_g = 0\}$, lo que muestra que $\mathbb{Q}^+\nu$ es una arista de $\mathcal{C}_X$. Además si $q\nu = \rho(\nu')$ con $\nu' \in \mathcal{F}(X)$ y $q \in \mathbb{Q}^+$, entonces $\chi_g(q\nu) = \chi_g(\rho(\nu')) > 0$, de donde $\chi_g(\nu) > 0$, lo que contradice la elección de g. Luego $\mathbb{Q}^+\nu$ no contiene puntos de $\rho(\mathcal{F}(X))$.

Recíprocamente, toda arista de $\mathcal{C}_X$ se puede suponer generada por $\nu \in \mathcal{B}(X) \cup \rho(\mathcal{F}(X))$, si además esta arista no contiene puntos de $\rho(\mathcal{F}(X))$, es $\mathbb{Q}^+\nu$, con $\nu \in \mathcal{B}(X)$. $\square$

Hemos probado que el mapa que asocia a cada variedad esférica simple X el par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ es inyectivo; resumimos estos resultados en el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2. *La inmersión simple (X, x) está determinada a menos de isomorfismos G-equivariantes, por el par $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$.*

Demostración: Se deduce directamente de la proposición anterior y del teorema 3.1. $\square$

TEOREMA 3.3. *Sea X una inmersión simple de G/H con órbita cerrada Y y $\nu \in \mathcal{V}$. Entonces:*

1. ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] = \{f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \mid \chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee\}$.
   Además $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ es invertible en X_0 si y sólo si $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\perp$.
2. *El centro de ν en X existe si y sólo si $\nu \in \mathcal{C}_X$.*
3. *El centro de ν es Y si y sólo si $\nu \in \mathcal{C}_X^\circ$.*

Demostración:

1. Por la proposición 3.1, una función racional $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ pertenece a ${}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ si y sólo si $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee$.
   Observemos además que como $\mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ en un generador de $\mathcal{C}_X^\vee$, entonces el conjunto $\{\chi_f \mid f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]\}$ es un generador de $\mathcal{C}_X^\vee$.
   Por otro lado $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ es invertible en X_0 si y sólo si $f, \frac{1}{f} \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$, si y sólo si $\nu(f) = 0$ para toda $\nu \in \mathcal{C}_X$, o sea $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\perp$.
2. Observemos primero que el centro de ν existe si y sólo si $\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$:
   Si el centro de ν es Z (G-estable), entonces $\tilde{Z} = Z \cap X_0 \neq \emptyset$ (ya que X_0 corta a toda G-órbita) y $\tilde{Z}$ es el centro de ν vista como valuación de la variedad afín X_0, luego $\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$. Recíprocamente, si $\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$, ν –como valuación de X_0– tiene centro $Z \subset X_0$, y $\overline{Z}^X$ es el centro de ν vista como valuación de X.
   Probaremos que $\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$ si y sólo si ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$, de donde se deduce que ν tiene centro si y sólo si ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$, que por la parte 1. es equivalente a $\nu \in (\mathcal{C}_X^\vee)^\vee = \mathcal{C}_X$.
   Supongamos que ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] \subset O_\nu$; si $f_0 \in \Bbbk[X_0]$, la proposición 2.3 asegura que existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ tal que $\nu(f) = \nu(f_0)$ y $\nu'(f) \geq \nu'(f_0)$ para toda $\nu' \in \mathcal{F}(X) \cup \mathcal{B}(X)$. Como $\nu'(f_0) \geq 0$ para toda $\nu' \in \mathcal{F}(X) \cup \mathcal{B}(X)$, tenemos que $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$; por lo tanto $\nu(f_0) = \nu(f) \geq 0$, i.e. $f_0 \in O_\nu$.

3. Observemos que $\nu \in \mathcal{C}_X^\circ$ si y sólo si $\{\chi \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X} \mid \chi(\nu) = 0\} = \mathcal{C}_X^\perp$.

   Si $\nu \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C}_X$ tiene centro Y, entonces $Y \cap X_0$ está definido por el ideal $\Bbbk[X_0] \cap m_\nu$. Sea $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0] \setminus \{0\}$ (i.e. $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$) tal que $\nu(f) = 0$; entonces $f \notin \Bbbk[X_0] \cap m_\nu$, es decir f no se anula en $Y \cap X_0$, y por lo tanto tampoco en X_0. En efecto, si $z \in X_0$ es tal que $f(z) = 0$, entonces f se anula en un divisor de X_0, por lo que existe un divisor B-estable D que contiene a Y tal que $\nu_D(f) > 0$, de donde $\nu_Y(f) > 0$ y f se anularía en $Y \cap X_0$. Luego f es invertible en X_0, esto es $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\perp$.

   Hemos probado que si $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ es tal que $\nu(\chi_f) = 0$, entonces $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\perp$, de donde $\nu \in \mathcal{C}_X^\circ$.

   Si $\nu \in \mathcal{C}_X^\circ$, entonces $\nu \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C}_X$ y por 2. ν tiene centro G-estable Z, que deberá contener a la única órbita cerrada Y. Supongamos que $Y \subsetneq Z$, entonces $Y \cap X_0 \subsetneq Z \cap X_0$ (si no fuera así $Y = \overline{Y \cap X_0} = \overline{Z \cap X_0} = Z$), luego existe $f_0 \in \Bbbk[X_0]$ tal que $f_0 \in I(Y \cap X_0)$ y $f_0 \notin I(Z \cap X_0) = \Bbbk[X_0] \cap m_\nu$, i.e. f_0 es nula en $Y = \overline{Y \cap X_0}$ y $\nu(f_0) = 0$. La proposición 2.3 asegura que existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ tal que $\nu(f) = \nu(f_0) = 0$ y $\nu'(f) \geq \nu'(f_0)$ $\forall \nu' \in \mathcal{B}(X) \cup \mathcal{F}(X)$. Pero $\nu'(f_0) \geq 0$ para todo $\nu' \in \mathcal{C}_X$, ya que $f_0 \in \Bbbk[X_0]$, de donde $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee$.

   Sea ν_Y la valuación de centro Y, la parte 2. asegura que $\nu_Y \in \mathcal{C}_X$, además, por nuestra elección de f_0 tenemos que $\nu_Y(f_0) > 0$, de donde $\nu_Y(f) > 0$. Hemos obtenido así $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee \setminus \mathcal{C}_X^\perp$ tal que $\chi_f(\nu) = 0$, lo que contradice el hecho de que $\nu \in \mathcal{C}_X^\circ$. Luego $Z = Y$.

$\square$

Como corolario de la prueba del teorema anterior tenemos el siguiente resultado, que usaremos en repetidas ocasiones.

Corolario 3.1. *Sean $\nu_0 \in \mathcal{C}_X \cap \mathcal{V}$ y Z' el centro de ν_0. Entonces Z' contiene una G-órbita abierta Z que satisface la siguiente propiedad: si D es un elemento de $\mathcal{D}_Y(X)$, $Z \not\subset D$ si y sólo si existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_0(f) = 0$ y $\nu_D(f) > 0$.*

Demostración: $Z' \subset X$ es un cerrado G-estable, entonces contiene un número finito de G-órbitas y por lo tanto contiene una G-órbita abierta Z (ver proposición 1.4).

Observemos que $Z \not\subset D$ si y sólo si $\Bbbk[X_0] \cap m_{\nu_D} \not\subset \Bbbk[X_0] \cap m_{\nu_0}$ i.e. existe $f \in \Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_D(f) > 0$ y $\nu_0(f) = 0$. Por la proposición 2.3 la última condición es equivalente a que exista $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_D(f) > 0$ y $\nu_0(f) = 0$. $\square$

2. Clasificación de inmersiones esféricas simples

Esta sección está dedicada a probar uno de los resultados más importantes del trabajo: existe una biyección entre clases de isomorfismo de inmersiones esféricas simples de G/H y conos coloreados estrictamente convexos de $V(G/H)$ (teorema 3.4). Comenzamos dando la definición de conos coloreados y luego, haciendo uso de las herramientas que hemos desarrollado hasta ahora, probamos el teorema.

Definición 3.2. Un *cono coloreado* de $(V, \mathcal{V})$ es un par $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{C} \subset V$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ verifican las siguientes propiedades:

C1: $\mathcal{C}$ es un cono generado por $\rho(\mathcal{F})$ y un número finito de elementos de $\mathcal{V}$.
C2: $\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Los *colores* son los elementos de $\mathcal{F}$.

Un cono coloreado se dice estrictamente convexo si:

SC: $\mathcal{C}$ es estrictamente convexo y $\rho(\mathcal{F})$ no contiene al origen.

Para construir, a partir de un cono coloreado estrictamente convexo $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de $(V, \mathcal{V})$ una inmersión esférica simple X de G/H tal que $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$, necesitamos estudiar ciertas álgebras que aparecen asociadas a $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Definición 3.3. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ un cono coloreado estrictamente convexo, notaremos $A_\mathcal{C} \subset \mathcal{V} \cup \rho(\mathcal{F})$ al conjunto de generadores de las aristas de $\mathcal{C}$. Definimos

$$\mathcal{E}_\mathcal{C} = \{f \in \Bbbk[BH/H] \mid \nu(f) \geq 0 \ \forall\ \nu \in \rho^{-1}(A_\mathcal{C}) \cap \mathcal{F}\} \cup \{0\}$$
$$\mathcal{A}_\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{E}_\mathcal{C} \mid \nu(f) \geq 0 \ \forall \nu \in A_\mathcal{C} \cap \mathcal{V}\} \cup \{0\}$$

Observemos que $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}_\mathcal{C}$ son subálgebras de $\Bbbk[BH/H]$, por lo tanto son dominios de integridad.

Lema 3.1. *Con la notación de la definición 3.3, existe $g_0 \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}$ tal que*

$$\mathcal{E}_\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \frac{1}{g_0^n} \bigoplus_{g \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}} N(g)$$

donde $N(g)$ es el G-módulo racional generado por g y χ es el peso de g_0 para la acción de H. Mas aún, la unión es creciente.

Demostración: Consideremos el conjunto

$$D_0 := ((G/H) \setminus (BH/H)) \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{F}} D$$

Dicho de otro modo, D_0 es la unión de los divisores primos B-estables de G/H que no están en $\mathcal{F}$. Por la proposición 1.11 –aplicada a $B \times H$–, existe $g_0 \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}$ tal que $\{g_0 = 0\} = \pi^{-1}(D_0)$.

Si $f \in \mathcal{E}_\mathcal{C}$, los polos de f están en D_0, luego existe $n \geq 0$ tal que $g_0^n f \in \Bbbk[G]$. Es claro que $g_0^n f$ tiene peso $n\chi$, luego $g_0^n f \in \Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$. Hemos probado que $\mathcal{E}_\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \frac{1}{g_0^n} \Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$.

Dado que las acciones de G y H conmutan, $\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$ es un G-módulo racional, por lo tanto está generado –como G-módulo– por B-vectores propios, i.e.

$$\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi} = \bigoplus_{g \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}} N(g)^{k(g)}.$$

Mas aún, observemos que si $g, h \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$ tienen igual peso para B, entonces $\frac{g}{h} \in {}^B\Bbbk(G/H) = \Bbbk$, de donde $g \in N(h)$, luego $k(g) = 1$ para todo g.

Si $m \geq n$ y $g_0^n f \in \Bbbk[G]$ tiene peso $n\chi$, entonces $g_0^m f \in \Bbbk[G]$ y tiene peso $m\chi$, luego $\frac{1}{g_0^n}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi} \subset \frac{1}{g_0^m}\Bbbk[G]^{(H)}_{m\chi}$, i.e. la unión es creciente. □

Observación 3.4. Como $\mathcal{C}$ es un cono poliédrico el lema de Gordan (proposición 1.15) asegura que el semigrupo $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ admite un número finito de generadores. Sea $\{\chi_{g_1}, \ldots, \chi_{g_r}\}$ un conjunto de generadores para $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$, con $g_1, \ldots, g_r \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$. Es claro que $g_i \in \mathcal{E}_\mathcal{C}$, luego el lema 3.1 asegura que para cada i existe $n_i \geq 0$ tal que $g_i = \frac{h_i}{g_0^{n_i}}$, con $h_i \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n_i\chi}$. Sea $n = \text{máx}\{n_i \mid i = 1, \ldots, r\}$, entonces para $i = 1, \ldots, r$ tenemos que $g_i = \frac{f_i}{g_0^n}$, con $f_i \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$.

Lema 3.2. *Para cada m, el subespacio $N_m := \{f \in \Bbbk[G]^{(H)}_{m\chi} \mid \nu(\frac{f}{g_0^m}) \geq 0\ \forall \nu \in A_\mathcal{C} \cap \mathcal{V}\}$ es un G-submódulo de $\Bbbk[G]^{(H)}_{m\chi}$.*

Mas aún, para cada m

$$N_m = \bigoplus_{\chi_{\frac{g}{g_0^m}} \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}} N(g).$$

Demostración: Queremos probar que si $a \in G$, $f \in N_m$ y $\nu \in A_\mathcal{C} \cap \mathcal{V}$, entonces $\nu(\frac{a \cdot f}{g_0^m}) \geq 0$. Sea $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ una extensión G-invariante de ν a $\Bbbk(G)$ (corolario 2.1), entonces $\nu(\frac{a \cdot f}{g_0^m}) = \bar{\nu}(\frac{a \cdot f}{g_0^m}) = \bar{\nu}(a \cdot f) - \bar{\nu}(g_0^m) = \bar{\nu}(f) - \bar{\nu}(g_0^m) = \nu(\frac{f}{g_0^m}) \geq 0$.

Sea $N_m = \bigoplus N(g)^{k(g)}$, con $g \in {}^{(B)}N_m$ una descomposición del G-módulo racional N_m. Como $N_m \subset \Bbbk[G]^{(H)}_{m\chi}$, del lema 3.1 deducimos que $k(g) = 1$ para todo $g \in {}^{(B)}N_m$. Por otro lado observemos que si $g \in {}^{(B)}N_m$, entonces $\frac{g}{g_0^m} \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ y sus polos están en D_0, luego $\nu(\frac{g}{g_0^m}) \geq 0$ para toda $\nu \in A_\mathcal{C}$, de donde $\chi_{\frac{g}{g_0^m}} \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$. $\square$

Lema 3.3. *El cuerpo de fracciones de $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ es $\Bbbk(G/H)$.*

Demostración: Sea $g \in \Bbbk[BH/H]$. Por **SC** existe $f \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ tal que $\nu(f) > 0$ para todo $\nu \in A_\mathcal{C}$ y como los generadores de $\mathcal{C}$ son un número finito, existe un entero positivo m tal que $\nu(gf^m) > 0$, para todo $\nu \in A_\mathcal{C}$, i.e. $gf^m \in \mathcal{A}_\mathcal{C}$. Entonces $g = \frac{gf^m}{f^m}$ está en el cuerpo de fracciones de $\mathcal{A}_\mathcal{C}$. Luego $\Bbbk[BH/H] \subset [\mathcal{A}_\mathcal{C}] \subset [\Bbbk[BH/H]]$, de donde $[\mathcal{A}_\mathcal{C}] = [\Bbbk[BH/H]]$. $\square$

Teorema 3.4. *La aplicación $(X, x) \mapsto (\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ es una biyección entre clases de isomorfismo de inmersiones simples de G/H y conos coloreados estrictamente convexos de $(V, \mathcal{V})$.*

Demostración: Si (X, x) es una inmersión simple entonces por definición $\mathcal{C}_X$ satisface **C1**. Sea $Y \subset X$ la G-órbita cerrada de X, entonces ν_Y es una valuación G-estable que tiene por centro a Y, luego el teorema 3.3 asegura que $\nu_Y \in \mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V}$, lo que prueba **C2**.

Para probar **SC** consideremos en X_0, el cerrado B-estable $X_0 \setminus Bx$. Por el teorema de Lie-Kolchin el B-módulo $I(X_0 \setminus Bx)$ contiene un B-vector propio, es decir $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ (o equivalentemente $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee$) y $f_{|X_0 \setminus Bx} = 0$. Como vimos en la prueba de la proposición 3.1, $X_0 \setminus Bx = \bigcup D \cap X_0$, con $D \in \mathcal{D}_Y(X)$, luego $\nu_D(f) > 0$ para todo $D \in \mathcal{D}_Y(X)$. Hemos probado que existe $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee$ tal que $\chi_f(\nu) > 0$ para todo $\nu \in \mathcal{C}_X$ i.e. $\mathcal{C}_X$ es estrictamente convexo.

El teorema 3.2 asegura que la correspondencia que asocia a cada variedad esférica simple X el cono coloreado $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$, es inyectiva.

Probaremos ahora que la correspondencia es sobreyectiva. Dado un cono coloreado $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, construiremos una inmersión simple X de G/H tal que $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Sea $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ un conjunto de generadores de $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$. Para cada i sea $g_i \in \Bbbk(G/H)$ un B-vector propio de peso χ_i. La observación 3.4 asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_i = \frac{f_i}{g_0^n}$, con $f_i \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}_{n\chi}$ y g_0 como en el lema 3.1.

Definimos $f_0 := g_0^n$. Observemos que $f_0(e) \neq 0$: si $f_0(e) = 0$, entonces f_0 sería nula en BH (porque es un $B \times H$-vector propio), y como BH es un abierto de G, f_0 sería nula.

Notaremos N al G-submódulo de $\Bbbk[G]$ generado por $\{f_0, f_1, \ldots, f_r\}$ y M al G-módulo dual de N. Observemos que N es de dimensión finita y está formado por vectores propios para H de peso $n\chi$.

Construimos un G-morfismo $\varphi : G/H \to \mathbb{P}(M)$ del siguiente modo:

Consideremos el mapa $\varepsilon : G \to M$ tal que $\varepsilon(a)(f) = f(a)\ \forall f \in N$. Es claro que ε es un morfismo de variedades afines. Probemos que ε es G-equivariante: si $a, a' \in G$ y $f \in N$, entonces $\varepsilon(aa')(f) = f(aa') = (a^{-1} \cdot f)(a') = \varepsilon(a')(a^{-1} \cdot f) = a \cdot \varepsilon(a')(f)$. Luego $\varepsilon(aa') = a \cdot \varepsilon(a')$ para todo $a, a' \in G$.

Si $a \in G$, entonces $a \cdot f_0 \in N$ y $\varepsilon(a)(a \cdot f_0) = (a \cdot f_0)(a) = f_0(e) \neq 0$. Luego $\varepsilon(a) \neq 0$ para todo $a \in G$. De donde si notamos $p : M \to \mathbb{P}(M)$ a la proyección, entonces $p \circ \varepsilon$ define un morfismo G-equivariante de G en $\mathbb{P}(M)$.

Probaremos que $p \circ \varepsilon$ es constante en las coclases de H en G, luego $p \circ \varepsilon$ induce un G-morfismo $\varphi : G/H \to \mathbb{P}(M)$, dado por $\varphi(aH) = p(\varepsilon(a))$. En efecto, si $c \in H$, $a \in G$ y $f \in N$, entonces $\varepsilon(ac)(f) = f(ac) = (f \cdot c^{-1})(a) = n\chi(c^{-1})f(a) = n\chi(c^{-1})\varepsilon(a)(f)$; luego, $\varepsilon(ac) \in \Bbbk^*\varepsilon(a)$.

Sea $X_0 := \overline{\varphi(G/H)} \cap \{f_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}(M)_{f_0}$, donde estamos considerando a f_0 como un polinomio homogéneo de grado 1 en M – i.e $f_0(m) = m(f_0)$ para todo $m \in M$–. Entonces X_0 es un cerrado B-estable del abierto afín $\mathbb{P}(M)_{f_0}$, por lo tanto es una B-variedad afín.

Sea $X := GX_0$; X es un abierto de $\overline{\varphi(G/H)}$, por lo tanto es una variedad. Probaremos que X es una inmersión de G/H y que $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Comenzamos mostrando que X_0 contiene una B-órbita abierta:

Afirmamos que si $x = \varphi(eH)$, entonces $Bx \subset X_0 = \overline{Gx} \cap \{f_0 \neq 0\}$. En efecto, $f_0(x) = f_0(\varphi(eH)) = f_0(p(\varepsilon(e))) = f_0(e) \neq 0$, i.e. $x \in X_0$ y como X_0 es B-estable tenemos que $Bx \subset X_0$.

Como BH/H es un abierto de G/H, $\overline{Bx} = \overline{\varphi(BH/H)} = \overline{\varphi(G/H)}$. Entonces Bx es un abierto de $\overline{Bx} \cap X_0 = X_0$.

Para el resto de la prueba será de mucha utilidad la siguiente observación: por construcción, el álgebra $\Bbbk[X_0]$ está generada por el conjunto $\left\{(\frac{f}{f_0})_{|X_0} \mid f \in N\right\}$ – aquí consideramos a f y a f_0 como funciones coordenadas de $\mathbb{P}(M)$–, y $\varphi^*((\frac{f}{f_0})_{|X_0}) = \frac{f}{f_0}$. Luego $\varphi^*(\Bbbk[X_0])$ está generada por el conjunto $\left\{\frac{f}{f_0} \mid f \in N\right\}$.

Para probar que X es una inmersión de G/H bastará probar que φ induce un isomorfismo $\varphi^* : \Bbbk(X) \to \Bbbk(G/H)$, ya que esto implica que $\varphi : G/H \to X$ es birracional, G-equivariante y como G/H es una G-órbita, φ es una inmersión. Probemos entonces que φ^* es un isomorfismo:

Observemos que $\varphi : BH/H \to X_0$ (y por lo tanto $\varphi : G/H \to X$) es dominante. Luego φ^* es inyectiva.

Afirmamos que para probar que φ^* es sobreyectiva basta probar que $\mathcal{A}_\mathcal{C} \subset [\varphi^*(\Bbbk[X_0])]$, donde $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ es el álgebra construida a partir de $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ en la definición 3.3. En efecto, el lema 3.3 asegura que el cuerpo de fracciones de $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ es $\Bbbk(G/H)$, luego si $\mathcal{A}_\mathcal{C} \subset [\varphi^*(\Bbbk[X_0])]$, entonces $\Bbbk(G/H) = [\mathcal{A}_\mathcal{C}] \subset [\varphi^*(\Bbbk[X_0])] = \varphi^*([\Bbbk[X_0]]) = \varphi^*(\Bbbk(X))$.

Probemos entonces que $\mathcal{A}_\mathcal{C} \subset [\varphi^*(\Bbbk[X_0])]$: si $f \in \mathcal{A}_\mathcal{C}$, entonces (en la notación del lema 3.2) existe $m_0 \geq 0$ tal que $f \in \frac{1}{g_0^m} N_m$ para todo $m \geq m_0$ y por el lema 3.2 tenemos que $N_m = \bigoplus N(g)$ donde g recorre el conjunto $\{g \in {}^{(B)}N_m \mid \chi_{\frac{g}{g_0^m}} \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\}$.

Bastará entonces probar que para m suficientemente grande, $\frac{N(g)}{f_0^m} \subset [\varphi^*(\Bbbk[X_0])]$ para todo $g \in {}^{(B)}N_m$ tal que $\chi_{\frac{g}{g_0^m}} \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$. Lo probaremos para $m = nl$ para l suficientemente grande: como $\chi_{\frac{g}{g_0^{nl}}} \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$, existen $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{g}{g_0^{nl}} = (\frac{f_1}{g_0^n})^{t_1} \dots (\frac{f_r}{g_0^n})^{t_r}$ y por lo tanto $g = (f_1^{t_1} \dots f_r^{t_r})g_0^{n(l-t)}$, donde $t = \sum_i t_i$. Entonces, si $a \in G$ tenemos que $\frac{a \cdot g}{g_0^{nl}} = (\frac{a \cdot f_1}{g_0^n})^{t_1} \dots (\frac{a \cdot f_r}{g_0^n})^{t_r} (\frac{a \cdot g_0}{g_0})^{n(l-t)}$.

Luego $\frac{N(g)}{g_0^m}$ se puede generar polinomialmente con elementos del conjunto

$$\frac{N(f_1)}{f_0} \cup \dots \cup \frac{N(f_r)}{f_0} \cup \frac{N(f_0)}{f_0} \cup \{(\frac{1}{f}) \mid f \in \frac{N(f_0)}{f_0}\},$$

y este conjunto está incluído en $[\varphi^*(\Bbbk[X_0])]$ ya que $\frac{f'}{f_0} = \varphi^*((\frac{f'}{f_0})_{|X_0}) \in \varphi^*(\Bbbk[X_0])$ para todo $f' \in N$. Esto complpeta la rpueba de que φ^* es un isomorfismo.

A partir de ahora identificamos G/H con el abierto $\varphi(G/H) \subset X$ y las valuaciones de $\Bbbk(G/H)$ con las valuaciones de $\Bbbk(X)$.

Probaremos que $\varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X_0]) = \{f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \mid \chi_f \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\}$:

Para probar que $\{f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \mid \chi_f \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\} \subset \varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X_0])$ basta probar que para cada $i = 1, \dots, r$, $g_i = \frac{f_i}{f_0} \in \varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X_0])$. Pero como ya hemos observado $\frac{f_i}{f_0} = \varphi^*((\frac{f_i}{f_0})_{|X_0}) \in \varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X_0])$.

La otra inclusión es consecuencia de la siguiente afirmación: $\varphi^*(\Bbbk[X_0]) \subset O_\nu$ para toda $\nu \in \mathcal{C}$. Para probar la afirmación observemos que si $D \in \mathcal{F}$, entonces $\varphi(D) \cap X_0 \neq \emptyset$ (de donde deducimos que $\overline{\varphi(D)} \cap X_0$ es un divisor de X_0). En efecto, si $\varphi(D) \cap X_0 = \emptyset$, entonces para todo $aH \in D$ tendríamos que $g_0^n(a) = f_0(a) = 0$, de donde $g_0(a) = 0$ y por lo tanto $aH \in D_0$. Luego $D \subset D_0$, lo que contradice la elección de D_0. Ahora bien, si $f \in \Bbbk[X_0]$ y $D \in \mathcal{F}$, entonces $0 \leq \nu_{\overline{\varphi(D)} \cap X_0}(f) = \nu_D(\varphi^*(f))$. De donde concluimos que $\varphi^*(\Bbbk[X_0]) \subset O_\nu$ para toda $\nu \in \rho(\mathcal{F})$.

Si $\nu \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C}$, bastará mostrar que ν es positiva en los generadores del álgebra $\varphi^*(\Bbbk[X_0])$, i.e. en el conjunto $\{(\frac{f}{f_0})_{|X_0} \mid f \in N\}$. Si $f \in N$ y $\overline{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ es una extensión G-invariante de ν a $\Bbbk(G)$, entonces $\nu(\frac{f}{f_0}) = \overline{\nu}(f) - \overline{\nu}(f_0) \geq \text{mín}_i\{\overline{\nu}(f_i)\} - \overline{\nu}(f_0) = \text{mín}_i\{\nu(g_i)\} \geq 0$.

Para completar la prueba del teorema resta probar: 1) X es una G-variedad simple. 2) X es una variedad normal. 3) $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

1. Probemos que X tiene una única G-órbita cerrada. Por **C2** existe $\nu_0 \in \mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V}$; como $\Bbbk[X_0] \subset O_{\nu_0}$, ν_0 –como valuación de $\Bbbk(X)$– tiene un centro G-estable en X que notaremos Y. Afirmamos que Y es la única órbita cerrada de G en X. En efecto, sea $Z \subset X$ un cerrado G-estable de X y $\nu_1 \in \mathcal{V}$ con centro Z, como $X = GX_0$ y Z es G-estable, tenemos que $Z \cap X_0 \neq \emptyset$. Entonces ν_1 tiene centro en X_0, o sea $\nu_1 \geq 0$ en $\Bbbk[X_0]$ y por lo tanto en ${}^{(B)}\Bbbk[X_0]$. Luego $\nu_1 \in (\mathcal{C}^\vee)^\vee = \mathcal{C}$. Si $Y \not\subset Z$, entonces como en la prueba del corolario 3.1, existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_0(f) = 0$ y $\nu_1(f) > 0$. Luego $\chi_f \in \mathcal{C}^\vee \setminus \mathcal{C}^\perp$ y $\chi_f(\nu_0) = 0$, lo que contradice el hecho de que $\nu_0 \in \mathcal{C}^\circ$. Hemos probado que Y está contenido en todo cerrado G-estable de X, luego la única G-órbita cerrada de X es Y.
2. Para probar que X es una variedad normal, basta probar que X_0 lo es. Notemos P el estabilizador de $\{f_0 = 0\} \subset \mathbb{P}(M)$; entonces $P = G_{[f_0]}$ es un subgrupo parabólico de G que contiene a B. El teorema 1.9 aplicado a $\eta = f_0$, asegura que existe una subvariedad cerrada L-estable $S' \subset \mathbb{P}(M)_{f_0}$ y un isomorfismo P-equivariante $\Gamma : R_u(P) \times S' \to \mathbb{P}(M)_{f_0}$, –donde $P = R_u(P)L$ es una descomposición de Levi de P –, que está definido por $\Gamma(a, s) = (a \cdot s)$ para todo $a \in R_u(P)$ y $s \in S'$.

Considerando $S = S' \cap X_0$ obtenemos una subvariedad cerrada L-estable de X_0. Afirmamos que el isomorfismo $\Gamma : R_u(P) \times S' \simeq \mathbb{P}(M)_{f_0}$ se restringe a un isomorfismo entre $R_u(P) \times S$ y X_0. En efecto, si $y \in X_0$, entonces $y = a \cdot s$, para algún $a \in R_u(P)$ y $s \in S'$; resta probar que $s \in S$: si no fuera así tendríamos que $f_0(s) = f_0(a^{-1} \cdot y) = 0$, pero como a pertenece al estabilizador de $\{f_0 = 0\}$, deducimos que $y \in \{f_0 = 0\}$, i.e $y \notin X_0$.

Para probar que $\Bbbk[X_0] \simeq \Bbbk[R_u(P)] \otimes \Bbbk[S]$ es integralmente cerrado, basta probar entonces que $\Bbbk[S]$ lo es, o equivalentemente que ${}^{U'}\Bbbk[S]$ lo es, donde U' es el unipotente maximal del subgrupo de Borel $B \cap L$ de L (teorema 1.10).

Observemos que si $\Bbbk[S] = \oplus_\lambda \Bbbk[S]_\lambda$ es la descomposición en submódulos simples del L-módulo racional $\Bbbk[S]$ (L es reductivo), entonces

$$ {}^{U'}\Bbbk[S] = \oplus_\lambda {}^{U'}\Bbbk[S]_\lambda = \oplus_\lambda {}^{(B\cap L)}\Bbbk[S]_\lambda, $$

de donde deducimos que ${}^{U'}\Bbbk[S]$ es isomorfo al álgebra del semigrupo

$$ \Lambda := \big\{ \lambda \in \mathcal{X}(B \cap L) \mid {}^{(B\cap L)}\Bbbk[S]_\lambda \neq \{0\} \big\}. $$

Por la proposición 1.14, tenemos que ${}^{(B\cap L)}\Bbbk[S] \simeq {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$. Luego ${}^{U'}\Bbbk[S] \simeq \Bbbk\langle\Lambda\rangle = \Bbbk\langle \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\rangle$, –donde si $\mathcal{Y}$ es un semigrupo, $\Bbbk\langle\mathcal{Y}\rangle$ denota el álgebra del semigrupo–. Por otro lado, $\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ es un semigrupo saturado, por lo que $\Bbbk\langle \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\rangle$ es integralmente cerrada.

3. Para probar que $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X)) = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$, probaremos primero que $X \setminus X_0 = \bigcup D$, donde D recorre el conjunto $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$.

Como X_0 es un abierto afín B-estable de X, $X \setminus X_0$ es unión de divisores B-estables de X. Afirmamos que los divisores en $X \setminus X_0$ son los divisores del conjunto $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$. En efecto, si $D \cap X_0$ es un divisor B-estable de X_0, entonces $Y \subset D$: si $Y \not\subset D$, entonces como en la prueba del corolario 3.1, existe $\chi_f \in \mathcal{C}^\vee \setminus \mathcal{C}^\perp$ tal que $\chi_f(\nu_0) = 0$, lo que contradice el hecho de que $\nu_0 \in \mathcal{C}^\circ$.

Por otro lado, como $Y \cap X_0 \neq \emptyset$ tenemos que si $Y \subset D$, entonces $D \cap X_0 \neq \emptyset$.

Probemos que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}$. Si $D \in \mathcal{F}$, por construcción $D \cap X_0 \neq \emptyset$, entonces $Y \subset D$ i.e. $D \in \mathcal{F}(X)$. Si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}$, entonces $D \subset D_0$, lo que implica que $\overline{D}^X \subset \{g_0 = 0\} = \{f_0 = 0\}$. Luego $\overline{D}^X \cap X_0 = \emptyset$ y $\overline{D}^X$ no contiene a Y, i.e. $D \notin \mathcal{F}(X)$.

Como $X_0 = X \setminus \bigcup D$, con D en $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$, la prueba de la proposición 3.1, muestra que ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] = \{f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \mid \chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee\}$. Pero ya hemos probado que ${}^{(B)}\Bbbk[X_0] = \{f \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H) \mid \chi_f \in \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}\}$, de donde $\mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X} = \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{X}$ y por lo tanto $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}$.

$\square$

CAPíTULO 4

Clasificación de las inmersiones esféricas de G/H

1. Clasificación de inmersiones

El objetivo de esta sección es probar que existe una biyección entre clases de isomorfismos G-equivariantes de variedades esféricas, y abanicos coloreados estrictamente convexos. Para ello necesitaremos afinar un poco los resultados obtenidos hasta ahora. Por ejemplo, veremos que existe una biyección entre G-órbitas de una variedad simple y caras (coloreadas) del cono coloreado que le asociamos en el capítulo 3.

Estudiaremos además los morfismos entre inmersiones de espacios homogéneos. Le asociaremos a un morfismo $\varphi : G/H \to G/H'$ un mapa lineal entre $V(G/H)$ y $V(G/H')$ y probaremos que φ se extiende a un morfismo entre inmersiones de G/H y G/H' si y sólo si el mapa lineal asociado a φ mapea el abanico asociado a una inmersión en el abanico asociado a la otra, en el sentido de la definición 4.4.

DEFINICIÓN 4.1. Un par $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ es una *cara coloreada* de un cono coloreado $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ si:

- $\mathcal{C}'$ es una cara de $\mathcal{C}$.
- ${\mathcal{C}'}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}')$.

Sea (X, x) una inmersión de G/H e Y una órbita de G en X. Notaremos $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ al cono coloreado asociado a la inmersión simple $X_{Y,G}$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea (X, x) una inmersión esférica de G/H e Y una G-órbita de X. Entonces la aplicación $Z \mapsto (\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X))$ establece una biyección entre las G-órbitas de X cuya clausura contiene a Y y las caras coloreadas de $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$.*

Demostración: Observemos que si $Z \subset X$ es una G-órbita que contiene a Y en su clausura, entonces Z es una G-órbita de $X_{Y,G}$. Luego podemos suponer que X es simple de órbita cerrada Y y probar la biyección entre G-órbitas de X y caras coloreadas de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$.

Sea $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ una cara coloreada de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ y $\nu_0 \in {\mathcal{C}'}^\circ \cap \mathcal{V}$. Por el teorema 3.3 ν_0 tiene centro Z' en X y por el corolario 3.1 Z' contiene una G-órbita abierta, que notaremos Z.

Afirmamos que $\{D \in \mathcal{D}(X) \mid \rho(\nu_D) \in \mathcal{C}'\} = \{D \in \mathcal{D}(X) \mid Z \subset D\}$, i.e. $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_Z(X)$. En efecto, si $D \in \mathcal{D}(X)$ es tal que $\rho(\nu_D) \in \mathcal{C}'$ y $Z \not\subset D$, el corolario 3.1 asegura que existe $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee \subset {\mathcal{C}'}^\vee$ tal que $\chi_f(\nu_0) = 0$ y $\chi_f(\rho(\nu_D)) > 0$, lo que contradice el hecho de que $\nu_0 \in {\mathcal{C}'}^\circ$. Recíprocamente, sean $D \in \mathcal{D}(X)$ tal que $Z \subset D$, y $\chi \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_X \cap \{\chi = 0\}$. Por el teorema 3.3, existe $g \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ tal que $\chi = \chi_g$. Como $Z \subset D$ y $\nu_0 \in \mathcal{C}'$ (i.e. $\nu_0(g) = 0$), el corolario 3.1 asegura que $\nu_D(g) = 0$. Luego, $\rho(\nu_D) \in \mathcal{C}'$.

Probemos que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_Z(X)$. Si $D \in \mathcal{F}' = \mathcal{F}(X) \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}')$, entonces $\rho(\nu_D) \in \mathcal{C}'$, luego $Z \subset D$, i.e. $D \in \mathcal{F}_Z(X)$. Recíprocamente, si $D \in \mathcal{F}_Z(X)$ entonces $Y \subset \overline{Z} \subset D$, es decir $D \in \mathcal{F}(X)$. Como $Z \subset D$ tenemos $\rho(\nu_D) \in \mathcal{C}'$, de donde $D \in \mathcal{F}(X) \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{F}'$.

Probemos que a cada G-órbita de X le corresponde una cara de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$. Sea $Z \subset X$ una G-órbita. Como X_0 es afín, existe $g \in \Bbbk[X_0]$ que se anula en $D \cap X_0$ para todo $D \in \mathcal{D}(X)$ que no contenga a Z y g no se anula en $Z \cap X_0$, en particular $\nu_D(g) > 0$

para todo $D \in \mathcal{D}(X)$ que no contenga a Z y $\nu_Z(g) = 0$. De la proposición 2.3 deducimos que existe $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ tal que $\nu_D(f) > 0$ para todo $D \in \mathcal{D}(X)$ que no contenga a Z y $\nu_Z(f) = 0$. Tenemos entonces que $\chi_f \in \mathcal{C}_X^\vee \cap \mathcal{X}$ satisface $\chi_f(\rho(\nu_Z)) = 0$ y $\chi_f(\rho(\nu_D)) > 0$ para todo $D \in \mathcal{D}(X)$ que no contenga a Z. Probemos que $(\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X))$ es la cara coloreada de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ definida por χ_f: si $D \in \mathcal{D}(X)$ y $Z \subset D$, entonces por el corolario 3.1, $\chi_f(\rho(\nu_Z)) = 0$ implica que $\chi_f(\rho(\nu_D)) = 0$. Recíprocamente, si $\chi_f(\rho(\nu_D)) = 0$, entonces $Z \subset D$ por construcción de f. Además, el teorema 3.3 asegura que $\nu_Z \in \mathcal{C}_Z(X)^\circ \cap \mathcal{V}$; luego $(\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X))$ es una cara coloreada de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$. □

Definición 4.2. Un *abanico coloreado* es un conjunto finito F de conos coloreados que verifica:

F1: Toda cara coloreada de un cono coloreado de F es un elemento de F.
F2: Para toda $\nu \in \mathcal{V}$ existe a lo sumo un cono coloreado $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in F$ tal que $\nu \in \mathcal{C}^\circ$.

Un abanico F es estrictamente convexo si está formado por conos coloreados estrictamente convexos.

Lema 4.1. *F es estrictamente convexo si y sólo si $(\{0\}, \emptyset) \in F$.*

Demostración: Si F es estrictamente convexo y $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ es un elemento de F, entonces $\mathcal{C}$ es estrictamente convexo y por lo tanto $\{0\}$ es una cara de $\mathcal{C}$. Además $0 \notin \rho(\mathcal{F})$, luego $\mathcal{F} \cap \rho^{-1}(0) = \emptyset$. Hemos probado que $(\{0\}, \emptyset)$ es una cara de todo cono $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in F$ y **F1** implica que $(\{0\}, \emptyset) \in F$.

Recíprocamente, supongamos que $(\{0\}, \emptyset) \in F$. Como $0 \in \mathcal{V}$, **F2** implica que $(\{0\}, \emptyset)$ es el único cono en F que tiene a 0 en su interior. Luego todo cono de F es estrictamente convexo. □

Observación 4.1. Sean $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ dos conos coloreados de F, sean $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$ caras coloreadas maximales de $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ respectivamente contenidas en $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Afirmamos que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) = (\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$ –y por lo tanto las caras son máximas–. En efecto, **F1** asegura que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1), (\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$ son conos coloreados de F, de donde existen $\nu \in \mathcal{C}_1^\circ \cap \mathcal{V}$ y $\nu' \in \mathcal{C}_1'^\circ \cap \mathcal{V}$.

Si notamos $(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$ (respectivamente $(\mathcal{C}_2', \mathcal{F}_2')$) a la cara coloreada minimal de $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ (respectivamente $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$) que contiene a $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_1'$, tenemos que $\nu + \nu' \in \mathcal{C}_2^\circ \cap \mathcal{V}$ y $\nu + \nu' \in \mathcal{C}_2'^\circ \cap \mathcal{V}$ y de **F2** deducimos que $(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2) = (\mathcal{C}_2', \mathcal{F}_2')$. Luego $(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$ es una cara coloreada de ambos conos, está contenida en la intersección y contiene a $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ (respectivamente contiene a $(\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$) de donde, por la maximalidad de $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ y de $(\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$ tenemos que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) = (\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2) = (\mathcal{C}_1', \mathcal{F}_1')$.

Notación 4.1. Si (X, x) es una inmersión esférica de G/H, notaremos

$$F(X) := \{(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X)) \mid Y \subset X \text{ es G-órbita}\}.$$

Proposición 4.2. *Si (X, x) es una inmersión esférica de G/H, entonces $F(X)$ es un abanico coloreado estrictamente convexo de $(V, \mathcal{V})$.*

Demostración: Si $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X)) \in F(X)$, la proposición 4.1 asegura que toda cara coloreada de este cono es de la forma $(\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X))$, donde Z es una G-órbita de X, por lo tanto está en $F(X)$, lo que prueba **F1**.

Si $\nu \in \mathcal{V}$ e Y_1, Y_2 son dos G-órbitas de X tales que $\nu \in \mathcal{C}_{Y_1}(X)^\circ \cap \mathcal{C}_{Y_2}(X)^\circ$, el teorema 3.3 asegura que el centro de ν vista como valuación de $X_{Y_1,G}$ (respectivamente $X_{Y_2,G}$) es Y_1 (respectivamente Y_2). Luego ν vista como valuación de X tiene centro $\overline{Y_1}$ e $\overline{Y_2}$, de donde $\overline{Y_1} = \overline{Y_2}$ y por lo tanto $Y_1 = Y_2$, lo que prueba **F2**.

El teorema 3.4 asegura que los conos $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ son estrictamente convexos, por lo tanto $F(X)$ es estrictamente convexo. □

Observación 4.2. Ordenemos al conjunto de las G-órbitas de X por inclusión de sus adherencias y al conjunto $F(X)$ del siguiente modo: $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') < (\mathcal{C}, \mathcal{F})$ si $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ es una cara coloreada de $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Usando el teorema 3.4 y la proposición 4.1 obtenemos el siguiente resultado:

La aplicación $Y \mapsto (\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ es una biyección que revierte el orden entre el conjunto de G-órbitas de X y $F(X)$. En esta biyección, a la órbita abierta de X le corresponde $(\{0\}, \emptyset) \in F(X)$. En efecto, si Z es la órbita abierta de X, entonces $Y \subset \overline{Z} = X$ para toda G-órbita Y, luego $(\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X))$ es una cara de todo cono en $F(X)$, i.e. $(\mathcal{C}_Z(X), \mathcal{F}_Z(X)) = (\{0\}, \emptyset)$.

Si X es simple, entonces $F(X)$ es el conjunto de caras coloreadas de $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$. A la órbita cerrada le corresponde el cono $(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}(X))$ y a la órbita abierta le corresponde la cara $(\{0\}, \emptyset)$.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema principal de este trabajo:

Teorema 4.1. *El mapa $X \mapsto F(X)$ induce una biyección entre clases de isomorfismo de inmersiones esféricas de G/H y abanicos coloreados estrictamente convexos de $(V, \mathcal{V})$.*

Demostración: Probaremos que el mapa es inyectivo: si $F(X) = F(X')$, entonces para toda G-órbita Y de X, el cono $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X)) \in F(X)$ es de la forma $(\mathcal{C}_{Y'}(X'), \mathcal{F}_{Y'}(X'))$, para alguna G-órbita Y' de X'. Luego el teorema 3.1 asegura que las variedades simples $X_{Y,G}$ y $X'_{Y',G}$ son isomorfas. Veamos que a partir de los isomorfismos en las variedades simples podemos definir un isomorfismo de X en X'. Como X y X' son unión finita de sus variedades simples, bastará probar que los isomorfismos definidos en las variedades simples coinciden en la intersección de dos de estas variedaes.

Si Y_1 y Y_2 son dos G-órbitas de X y $\varphi_1 : X_{Y_1,G} \to X'_{Y'_1,G}$ y $\varphi_2 : X_{Y_2,G} \to X'_{Y'_2,G}$ son los isomorfismos definidos en la prueba del teorema 3.1, entonces φ_1 y φ_2 llevan el punto base x de X en el punto base x' de X' y como son G-equivariantes, coinciden en el abierto $Gx \subset X_{Y_1,G} \cap X_{Y_2,G}$, por lo tanto coinciden en $X_{Y_1,G} \cap X_{Y_2,G}$.

Recíprocamente, si F es un abanico coloreado estrictamente convexo, a cada cono coloreado $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de F le corresponde una variedad esférica simple $X(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Construimos entonces la variedad X tal que $F(X) = F$ como la unión disjunta de las variedades simples $X(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, con $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in F$, donde identificamos las variedades isomorfas correspondientes a las caras coloreadas maximales comunes de conos de F: sean $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ dos conos de F y $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) \in F$ la cara coloreada de ambos contenida en la intersección, y maximal para esta propiedad (observación 4.1). Entonces $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ es el cono coloreado asociado a una variedad esférica simple $X_1 \subset X(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ y a una variedad esférica simple $X'_1 \subset X(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$. Como X_1 y X'_1 tienen asociado el mismo cono, son isomorfas (teorema 3.2).

Obtenemos así una prevariedad. Para probar que X es separada (i.e. la diagonal $\Delta(X)$ es cerrada en $X \times X$), basta probar que $\Delta(X) \cap (X_1 \times X_2)$ es cerrado de $X_1 \times X_2$ para todo par de variedades simples correspondientes a conos coloreados de F.

Observemos que $\overline{\Delta(X) \cap (X_1 \times X_2)} = \overline{\Delta(G/H)}$ –clausura en $X_1 \times X_2$–. Sea $\tilde{X}$ la normalización de $\overline{\Delta(G/H)}$ y $P : \tilde{X} \to \overline{\Delta(G/H)}$, el epimorfismo canónico. Bastará probar que $P(\tilde{X}) = \Delta(X) \cap (X_1 \times X_2)$, ya que $P(\tilde{X}) = \overline{\Delta(G/H)} = \overline{\Delta(X) \cap (X_1 \times X_2)}$.

Sean $\rho_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $\rho_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ las proyecciones, $p_1 = \rho_1 \circ P : \tilde{X} \to X_1$ y $p_2 = \rho_2 \circ P : \tilde{X} \to X_2$.

Si $(x, y) \in P(\tilde{X})$, entonces existe una G-órbita $Y \subset \tilde{X}$ tal que $(x, y) \in P(\tilde{X}_{Y,G})$. Notaremos $Z_1 \subset X_1$ y $Z_2 \subset X_2$, a las variedades esféricas simples de órbitas cerradas $p_1(Y)$ y $p_2(Y)$ respectivamente.

Observemos que $\rho_1(P(\tilde{X}_{Y,G})) = p_1(\tilde{X}_{Y,G}) \subset Z_1$ y $\rho_2(P(\tilde{X}_{Y,G})) = p_2(\tilde{X}_{Y,G}) \subset Z_2$, luego $P(\tilde{X}_{Y,G}) \subset \overline{\Delta(G/H)} \cap (Z_1 \times Z_2)$.

Si $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$ es la valuación que tiene por centro a Y, entonces ν considerada como valuación de $\Bbbk(X_1)$ tiene centro $p_1(Y)$ y considerada como valuación de $\Bbbk(X_2)$ tiene centro $p_2(Y)$, de donde $\nu \in \mathcal{C}^\circ_{Z_1} \cap \mathcal{C}^\circ_{Z_2} \cap \mathcal{V}$. Por otro lado, los conos coloreados asociados a Z_1 y Z_2 son conos coloreados del abanico F, ya que son caras de lo conos de X_1 y de X_2 respectivamente, y por lo tanto la condición [**F2**] implica que $(\mathcal{C}_{Z_1}, \mathcal{F}(Z_1)) = (\mathcal{C}_{Z_2}, \mathcal{F}(Z_2))$, de donde $Z_1 = Z_2$ en X.

Tenemos entonces que $P(\tilde{X}_{Y,G}) \subset \overline{\Delta(G/H)} \cap (Z_1 \times Z_1) = \overline{\Delta(G/H)}^{Z_1\times Z_1} = \overline{\Delta(Z_1)}^{Z_1\times Z_1} = \Delta(Z_1) \subset Z_1 \times Z_1$, –la última igualdad se debe a que Z_1 es una variedad algebraica y por lo tanto es separada–. Deducimos entonces que $(x, y) \in \Delta(Z_1)$, i.e. $x = y \in Z_1 \subset X_1$, de donde $(x, y) \in \Delta(X) \cap (X_1 \times X_2)$, como queríamos mostrar. □

2. Morfismos

Sea $\varphi : G/H \to G/H'$ un morfismo G-equivariante entre espacios homogéneos esféricos, en esta sección le asociaremos a φ un mapa lineal entre los correspondientes espacios vectoriales $V(G/H)$ y $V(G/H')$ que notaremos φ_*. Luego probaremos que un morfismo de ese tipo entre espacios homogéneos esféricos puede extenderse a un morfismo entre inmersiones de dichos espacios si y sólo si el morfismo lineal φ_* mapea – en el sentido de la definición 4.4– el abanico correspondiente a una inmersión en el abanico correspondiente a la otra.

Definición 4.3. Sean G/H y G/H' dos espacios homogéneos esféricos y consideremos un morfismo G-equivariante $\varphi : G/H \to G/H'$. Entonces φ es sobreyectivo y $\varphi^* : \Bbbk(G/H') \to \Bbbk(G/H)$ se restringe a un monomorfismo de grupos $\varphi^* : {}^{(B)}\Bbbk(G/H') \to {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$, que podemos ver como un monomorfismo $\varphi^* : \mathcal{X}(G/H') \to \mathcal{X}(G/H)$ (recordar que $\mathcal{X}(G/H) \simeq {}^{(B)}\Bbbk(G/H)/\Bbbk^*$, observación 2.7). Explícitamente: $\varphi^*(\chi_f) = \chi_{\varphi^*(f)}$.

Definimos el mapa $\varphi_* : V(G/H) \to V(G/H')$, como $\varphi_*(\nu) := \nu \circ \varphi^*$. Es claro que de esta forma se obtiene un mapa lineal de $V(G/H)$ en $V(G/H')$.

Lema 4.2. *Sean $\varphi : G/H \to G/H'$ un morfismo G-equivariante entre espacios homogéneos esféricos, y $\varphi_* : V(G/H) \to V(G/H')$ el morfismo asociado. Entonces*

$$\varphi_*(\mathcal{V}(G/H)) = \mathcal{V}(G/H').$$

Demostración: Es claro que si $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$, entonces $\varphi_*(\nu) \in \mathcal{V}(G/H')$ ya que φ es G-equivariante.

Sea $\nu' \in \mathcal{V}(G/H')$, observemos que $\varphi \circ \pi : G \to G/H'$ (donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección) es un morfismo sobreyectivo, por lo tanto induce una extensión de cuerpos $\pi^* \circ \varphi^* : \Bbbk(G/H') \hookrightarrow \Bbbk(G)$. Como en el corolario 2.1 se prueba que existe $\bar{\nu} \in \mathcal{V}(G)$ tal que $\bar{\nu} \circ \pi^* \circ \varphi^* = \nu'$. Entonces $\nu = \bar{\nu} \circ \pi^*$ es una valuación en $\mathcal{V}(G/H)$ y $\varphi_*(\nu) = \nu'$. □

Notación 4.2. Notaremos $\mathcal{F}_\varphi$ al conjunto formado por los divisores $D \in \mathcal{D}(G/H)$ que se mapean dominantemente por φ sobre G/H' i.e. $\overline{\varphi(D)} = G/H'$. Observemos que si $D \in \mathcal{F}_\varphi$, entonces $\varphi_*(\rho(\nu_D)) = 0$. Además, si $D \in \mathcal{D}(G/H) \backslash \mathcal{F}_\varphi$, entonces $\overline{\varphi(D)} \in \mathcal{D}(G/H')$ (lema 1.3). De este modo obtenemos un mapa de $\mathcal{D}(G/H) \setminus \mathcal{F}_\varphi$ en $\mathcal{D}(G/H')$, que también notaremos φ_*, dado por $\varphi_*(D) = \overline{\varphi(D)}$.

Definición 4.4. Sean $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ conos coloreados de $V(G/H)$ y $V(G/H')$ respectivamente, decimos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ se mapea por φ_* en $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ si:

M1: $\varphi_*(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}'$.
M2: $\varphi_*(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_\varphi) \subseteq \mathcal{F}'$.

Si F y F' son abanicos coloreados de $V(G/H)$ y $V(G/H')$ respectivamente, decimos que F se mapea por φ_* en F' si todo elemento de F se mapea en un elemento de F'.

TEOREMA 4.2. *Sea X una inmersión de G/H, X' una inmersión de G/H' y $\varphi : G/H \to G/H'$ un morfismo dominante. Entonces φ se extiende a un morfismo de X en X' si y sólo si $F(X)$ se mapea por φ_* en $F(X')$.*

Demostración: Supongamos que φ se extiende a un morfismo G-equivariante de X en X', que notaremos igualmente φ. Todo cono de $F(X)$ es de la forma $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$, para alguna G-órbita Y de X, y para toda G-órbita de X, $Y' := \varphi(Y)$ es una G-órbita de X' con $(\mathcal{C}_{Y'}(X'), \mathcal{F}_{Y'}(X')) \in F(X')$. Bastará entonces mostrar que $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ se mapea en $(\mathcal{C}_{Y'}(X'), \mathcal{F}_{Y'}(X'))$.

Podemos entonces suponer que X y X' son variedades simples con órbitas cerradas Y y $\varphi(Y)$ respectivamente.

Si $D \in \mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_\varphi$, entonces $D \in \mathcal{D}_Y(X)$ y $D \cap G/H \neq \emptyset$. Luego $\overline{\varphi(D)}^{X'} \in \mathcal{D}_{Y'}(X')$ y $\overline{\varphi(D)}^{X'} \cap G/H' \neq \emptyset$, de donde $\varphi_*(D) \in \mathcal{F}(X')$, lo que prueba **M2**.

Sean X_0 y X'_0 los abiertos afines B-estables de X y X' dados por la proposición 2.5 respectivamente. Observemos que $\varphi(X_0) \subset X'_0$: si $\varphi(x) \in X' \setminus X'_0$, entonces existe un divisor D en $\mathcal{D}(X') \setminus \mathcal{D}_{Y'}(X')$ tal $\varphi(x) \in D$, luego x pertenece a una componente irreducible de $\varphi^{-1}(D)$, i.e. a un divisor B-estable E de X. Pero como $Y' \not\subset D$, tenemos que $Y \not\subset E$, de donde x pertenece a un divisor en $\mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{D}_Y(X)$ i.e. $x \in X \setminus X_0$.

De lo anterior deducimos que $\varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X'_0]) \subset {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$.

Probemos ahora **M1**. Si $\nu \in \mathcal{C}_X$, para probar que $\varphi_*(\nu) \in \mathcal{C}_{X'}$ bastará probar que $\varphi_*(\nu)(\chi_f) \geq 0$ para todo $\chi_f \in \mathcal{X}(G/H) \cap \mathcal{C}^\vee_{X'}$, i.e. $\varphi_*(\nu)(\chi_f) \geq 0$ para todo $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X'_0]$ (teorema 3.3). Si $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X'_0]$, entonces $\varphi^*(f) \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$, i.e. $\chi_{\varphi^*(f)} \in \mathcal{C}^\vee_X$, de donde deducimos que $0 \leq \nu(\chi_{\varphi^*(f)}) = \nu(\varphi^*(f)) = \varphi_*(\nu)(f)$.

Recíprocamente, supongamos que $F(X)$ se mapea en $F(X')$. Para probar que φ se extiende a un morfismo de X en X' bastará probar que para cada G-órbita $Y \subset X$, φ se extiende a un morfismo entre $X_{Y,G}$ y una variedad simple de X'. Estos morfismos coincidirán en la G-órbita abierta de X (ya que extienden a φ), luego darán lugar a un morfismo entre X y X'.

Si $Y \subset X$ es una G-órbita, entonces φ_* mapea el cono $(\mathcal{C}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ en un cono $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in F(X')$, que corresponde a una órbita de X', i.e. es de la forma $(\mathcal{C}_{Y'}(X'), \mathcal{F}_{Y'}(X'))$ para alguna G-órbita Y' de X'. Probaremos que φ se extiende a un morfismo entre $X_{Y,G}$ y $X'_{Y',G}$.

Sean x y x' los puntos base de X y X' respectivamente. Consideremos los conjuntos abiertos

$$X_1 := (Gx \setminus \bigcup D) \cap (X_{Y,G})_0,$$

donde D recorre el conjunto $\mathcal{F}_\varphi$, y

$$X'_1 := Gx' \cap (X'_{Y',G})_0.$$

Entonces $X_1 \setminus Bx = \bigcup (D \cap X_1)$, donde D recorre el conjunto $\mathcal{F}(X_{Y,G}) \setminus \mathcal{F}_\varphi$ y $X'_1 \setminus Bx' = \bigcup D' \cap X'_1$, donde D' recorre el conjunto $\mathcal{F}(X'_{Y',G})$. Luego, por **M2** tenemos que $\varphi(X_1 \setminus Bx) \subset X'_1 \setminus Bx$; además, $\varphi(Bx) \subset Bx'$, de donde concluímos que $\varphi(X_1) \subset X'_1$.

Aseguramos que **M1** implica que $\varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X'_0]) \subset {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$. En efecto, si $f \in {}^{(B)}\Bbbk[X'_0]$ (i.e. $\chi_f \in \mathcal{C}^\vee_{X'} \cap \mathcal{X}(G/H')$) y $\nu \in \mathcal{C}_X$, entonces $\nu \circ \varphi^* \in \mathcal{C}_{X'}$ y por lo tanto $0 \leq \chi_f(\nu \circ \varphi^*) = \nu(\varphi^*(f))$. Hemos probado que $\chi_{\varphi^*(f)} \in \mathcal{C}^\vee_X \cap \mathcal{X}(G/H)$, luego $\varphi^*(f) \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$.

Probaremos que $\varphi^*({}^{(B)}\Bbbk[X'_0]) \subset {}^{(B)}\Bbbk[X_0]$ implica que $\varphi^*(\Bbbk[X'_0]) \subset \Bbbk[X_0]$:

Si $f \in \Bbbk[X_0']$, para probar que $\varphi^*(f) \in \Bbbk[X_0]$, es suficiente probar que $\nu(\varphi^*(f)) \geq 0$ para todo $\nu \in \mathcal{F}(X) \cup \mathcal{B}(X)$ (proposición 3.1). Sea $D \in \mathcal{F}(X)$; si $D \in \mathcal{F}_\varphi$ entonces $\varphi_*(\rho(\nu_D)) = 0$, luego $\nu_D(\varphi^*(f)) = 0$, si $D \in \mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_\varphi$, entonces $\varphi_*(\nu_D) \in \mathcal{F}(X')$, luego $\varphi_*(\nu_D)(f) \geq 0$ (proposición 3.1).

Si $\nu_0 \in \mathcal{B}(X)$, entonces $\varphi_*(\nu_0) \in \mathcal{V}(G/H')$ (lema 4.2) y la proposición 2.3 asegura que existe $f' \in {}^{(B)}\Bbbk[X_0']$ tal que $\varphi_*(\nu_0)(f') = \varphi_*(\nu_0)(f)$. Entonces $0 \leq \varphi_*(\nu_0)(f') = \varphi_*(\nu_0)(f)$, i.e. $\nu_0(\varphi^*(f)) \geq 0$, como queríamos mostrar.

Tenemos entonces $\varphi^* : \Bbbk[X_0'] \to \Bbbk[X_0]$ y un morfismo $\psi : X_0 \to X_0'$ tal que $\psi^* = \varphi^*_{|\Bbbk[X_0']}$. Además, si notamos ι a la inclusión $X_1 \hookrightarrow X_0$, $(\psi \circ \iota)^*$ coincide con φ^* en $\Bbbk[X_0']$ y como $\Bbbk(X_1') = [\Bbbk[X_0']]$, $(\psi \circ \iota)^*$ coincide con φ^* en $\Bbbk(X_1')$, de donde $\psi \circ \iota = \varphi$ i.e. ψ extiende a φ a un morfismo de X_0 en X_0'.

Como φ es G-equivariante, se extiende a un morfismo de $X = GX_0$ en $X' = GX_0'$. $\square$

CAPíTULO 5

Ejemplos

En este capítulo mostraremos algunos ejemplos de variedades esféricas. En la primera sección mostramos que la clasificación de las variedades tóricas en tanto variedades esféricas coincide con la clasificación clásica de las variedades tóricas. En la segunda sección estudiamos el espacio homogéneo SL_2/SO_2.

A continuación enunciamos algunas propiedades del conjunto de valuaciones invariantes de G/H, que ayudarán a comprender la estructura de $\mathcal{V}(G/H)$ dentro del espacio vectorial $V(G/H)$. No incluimos las pruebas, eśtas pueden encontrarse en [**10**] o en [**3**].

Sean $g_1, \ldots, g_s \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ y $h \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}$ tales que $f_i = g_i h \in \Bbbk[G]$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Para cada i, sea $N_i \subset \Bbbk[G]$ el G-submódulo generado por f_i. Como en la prueba del teorema 3.4 se prueba que si $f \in {}^{(B)}(N_1 \cdots N_s)$, entonces $\frac{f}{h^s} \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$ y si $\nu \in \mathcal{V}$, entonces $\nu(\frac{f}{h^s}) \geq \sum_{i=1}^{s} \nu(g_i)$.

Sea

$$\delta = \delta(g_1, \ldots, g_s, h, f) = \sum_{i=1}^{s} \chi_{g_i} - \chi_{\frac{f}{h^s}} \in \mathcal{X}(G/H),$$

entonces la desigualdad del párrafo anterior se traduce en $\nu(\delta) \leq 0$.

Notación 5.1. Notaremos Δ al conjunto de los $\delta = \delta(g_1, \ldots, g_s, h, f) \in \mathcal{X}(G/H)$ donde $g_1, \ldots, g_s \in {}^{(B)}\Bbbk(G/H)$, $h \in {}^{(B)}\Bbbk[G]^{(H)}$ es tal que $g_i h \in \Bbbk[G]$ y $f \in {}^{(B)}(N_1 \cdots N_s)$ como en el párrafo anterior.

Lema 5.1.

$$\mathcal{V}(G/H) = \{\nu \in V(G/H) \mid \ \nu(\delta) \leq 0 \ \forall \ \delta \in \Delta\}.$$

Demostración: Ver por ejemplo [**10**]. □

Sea $V_0 = Hom(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$ y

$$C = \{\nu \in V_0 \mid \ \nu(\alpha) \leq 0 \text{ para toda raíz positiva } \alpha\},$$

o sea C es la cámara de Weil negativa. Entonces la inclusión $\mathcal{X}(G/H) \subset \mathcal{X}(B)$ induce un mapa sobreyectivo $V_0 \to V$; notaremos $C_{G/H}$ a la imagen de C por este mapa, i.e.

$$C_{G/H} = \{\nu \in V \mid \nu(\alpha) \leq 0 \text{ para toda raíz positiva } \alpha\}.$$

Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.1. *El conjunto de valuaciones G-invariantes $\mathcal{V}(G/H)$ es un cono finitamente generado que contiene a $C_{G/H}$. En particular $\mathcal{V}$ genera a V como espacio vectorial.*

Demostración: Ver por ejemplo [**10**]. □

1. Variedades Tóricas

Si $G = T$ es un toro algebraico, entonces $G = B = T \simeq T/\{e\}$ es un espacio homogéneo esférico. Notaremos $\mathcal{X}_*(T)$ al grupo de subgrupos a un parámetro de T. Consideraremos a $\mathcal{X}_*(T)$ como el retículo dual de $\mathcal{X}(T)$, mediante el "dual pairing" $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{X}(T)\times\mathcal{X}_*(T) \to \mathbb{Z}$, dado por $\langle \chi, \lambda\rangle = n$ si y sólo si $\chi(\lambda(t)) = t^n$ para todo $t \in \Bbbk^*$.

En este caso el conjunto de pesos de $B = T$ en $\Bbbk(T)$, coincide con el grupo de caracteres de T –i.e. $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T)$–. Podemos entonces identificar $V(T) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ con $\mathcal{X}_*(T)\otimes\mathbb{Q}$.

Observemos además que $\mathcal{D}(T) = \emptyset$, ya que no hay divisores T estables en T. Luego la clasificación de las variedades tóricas está dada por conos estrictamente convexos de $V(T)$. La condición $\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ se satisface automáticamente en este caso por estar $\mathcal{C}$ generado por elementos de $\mathcal{V}$ solamente.

Sea X una T-variedad tórica simple de órbita cerrada Y. De la teoría de variedades tóricas resulta que las inmersiones simples de T están clasificadas por conos racionales poliedrales estrictamente convexos de $\mathcal{X}_*(T)\otimes\mathbb{Q}$ (ver [**6**]). Veremos que la clasificación como variedad esférica coincide con esta clasificación.

Observemos que si $D \in \mathcal{D}(X)$, es un divisor T-estable, entonces $D \subset X\setminus T$, luego $\mathcal{D}(X)$ es el conjunto de las componentes irreducibles de $X\setminus T$. Por otro lado si $D \in \mathcal{D}(X)$, deberá contener a la única órbita cerrada, i.e. $Y \subset D$. De donde deducimos que:

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}_Y(X).$$

La proposición 2.5 asegura entonces que $X = X_0$ es afín y recobramos el conocido resultado:

Proposición 5.2. *Toda variedad tórica simple es afín.*

□

Ya vimos que $V(T) \simeq \mathcal{X}_*(T)\otimes\mathbb{Q}$. Tenemos entonces por el corolario 2.3 que el mapa $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{X}_*(T)\otimes\mathbb{Q}$ es inyectivo. Probaremos que ρ es también sobreyectivo:

Sea $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$, veamos cómo asociarle una valuación T-estable de $\Bbbk(X)$ –que notaremos ν_λ– tal que $\rho(\nu_\lambda) = \lambda$. Bastará definir la valuación en $\Bbbk[T]$.

Para el T-módulo racional $\Bbbk[T]$ tenemos una descomposición de la forma

$$\Bbbk[T] = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{X}(T)} \Bbbk[T]_\chi.$$

Si $f \in \Bbbk[T]$, entonces f se escribe de forma única como $f = \sum a_\chi f_\chi$ con $\chi \in \mathcal{X}(T)$ y $a_\chi \in \Bbbk$, definimos entonces

$$\nu_\lambda(f) := \text{mín}\{\langle\chi, \lambda\rangle \mid a_\chi \neq 0\}.$$

Es fácil ver que ν_λ define una valuación de $\Bbbk(T)$.

Veamos que ν_λ es T-estable: si $t \in T$ y $f \in \Bbbk[T]$, tenemos que

$$t\cdot f = \sum_{\chi\in\mathcal{X}(T)} a_\chi(t\cdot f_\chi) = \sum_{\chi\in\mathcal{X}(T)} \chi(t)a_\chi f_\chi.$$

Como $\chi(t) \neq 0$ para todo $t \in T$, tenemos que

$$\nu_\lambda(f) = \text{mín}\{\langle\chi, \lambda\rangle \mid a_\chi \neq 0\} = \text{mín}\{\langle\chi, \lambda\rangle \mid \chi(t)a_\chi \neq 0\} = \nu_\lambda(t\cdot f).$$

Observemos además que si $f \in \Bbbk(X)$ es un T-vector propio, entonces $\rho(\nu_\lambda)(\chi_f) = \langle\chi_f, \lambda\rangle = \lambda(\chi_f)$. Luego $\rho(\nu_\lambda) = \lambda$.

Por otro lado, $\mathcal{F}(X) = \emptyset$ y $\mathcal{B}(X) = \mathcal{D}(X)$. Luego $\mathcal{C}_X$ es el cono generado por $\mathcal{B}(X)$ en el espacio vectorial $\mathcal{X}_*(T) \otimes \mathbb{Q}$; y la proposición 3.1 muestra que

$$\Bbbk[X] = \{f \in \Bbbk[T] \mid \nu(f) \geq 0 \,\forall \nu \in \mathcal{B}(X)\}.$$

El teorema 3.4 muestra que el mapa $X \mapsto \mathcal{C}_X$ es una biyección entre variedades tóricas simples y conos racionales estrictamente convexos de $\mathcal{X}_*(T) \otimes \mathbb{Q}$, de donde se obtiene la clasificación de variedades tóricas simples por conos racionales estrictamente convexos de $\mathcal{X}_*(T) \otimes \mathbb{Q}$.

2. $SL_2(\mathbb{C})/SO_2(\mathbb{C})$

En esta sección estudiamos el espacio homogéneo SL_2/SO_2. Este espacio es esférico ya que es un espacio homogéneo simétrico para el automorfismo involutivo $\sigma : SL_2 \to SL_2$, $\sigma(a) = (a^t)^{-1}$.

Encontraremos explícitamente los datos combinatorios asociados a este espacio homogéneo.

Sea $B \subset SL_2$ el subgrupo de Borel formado por las matrices triangulares superiores de determinante uno; $T \subset B$ el toro maximal de B formado por las matrices diagonales.

El grupo de caracteres de T está generado por $\chi : T \to \mathbb{C}^*$ tal que $\chi(t) = t_{1,1}$ para todo $t \in T$.

Lema 5.2. *El conjunto $SL_2 \setminus BSO_2$ es cerrado en SL_2 y sus componentes irreducibles son dos divisores –D_1 y D_2– tales que $D_1 = \{x_{2,1} - ix_{2,2} = 0\}$ y $D_2 = \{x_{2,1} + ix_{2,2} = 0\}$.*

Demostración: Observemos que $SO_2 \subset SL_2$ está definido por las ecuaciones

$$x_{1,1} = x_{2,2},$$
$$x_{1,2} = -x_{2,1}$$

Un simple cálculo muestra que el abierto $BSO_2 \subset SL_2$ está definido –en SL_2– por la condición $x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2 \neq 0$.

Luego $SL_2 \setminus BSO_2 = \{x_{2,1} - ix_{2,2} = 0\} \cup \{x_{2,1} + ix_{2,2} = 0\} = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son divisores primos de SL_2. Notaremos $f_1 = x_{2,1} - ix_{2,2}$ y $f_2 = x_{2,1} + ix_{2,2}$.

□

Como en todo el trabajo, $\pi : SL_2 \to SL_2/SO_2$ denota la proyección canónica.

Lema 5.3. *Los divisores $\pi(D_1)$ y $\pi(D_2)$ de SL_2/SO_2 son distintos.*

Demostración: Observemos que D_1 es la SO_2-órbita de $a = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix}$, como se deduce de la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia_{1,1} & ia_{1,2} \\ -ia_{1,2} & ia_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ i\frac{1}{a_{1,1}-ia_{1,2}} & \frac{1}{a_{1,1}-ia_{1,2}} \end{pmatrix}.$$

Luego $\pi(D_1) = \pi(D_2)$ si y sólo $a^{-1}d \in SO_2$ para toda matriz $d \in D_2$. Sea $d = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ -i\frac{1}{a_{1,1}+ia_{1,2}} & \frac{1}{a_{1,1}+ia_{1,2}} \end{pmatrix}$, entonces $a^{-1}d = \begin{pmatrix} ia_{1,1} & ia_{1,2} \\ a_{1,1} - \frac{1}{a_{1,1}+ia_{1,2}} & a_{1,2} - i\frac{1}{a_{1,1}+ia_{1,2}} \end{pmatrix}$, de donde es fácil ver que si $a^{-1}d \in SO_2$, tendríamos que $det(d) = 0$.

□

Hemos probado que $\mathcal{D}(SL_2/SO_2) = \{\pi(D_1), \pi(D_2)\}$.

Es fácil ver que las ecuaciones que definen a D_1 y a D_2, que hemos llamado f_1 y f_2 respectivamente son B-vectores propios, ambos de peso χ, i.e. $f_1, f_2 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[SL_2]_\chi$.

Por otro lado, observemos que f_1 y f_2 no son fijos para la acción de SO_2: si $a \in SO_2$ y $x \in SL_2$, entonces $(f_1 \cdot a)(x) = f_1(xa^{-1}) = (a_{1,1} + ia_{1,2})f_1(x)$ y $(f_2 \cdot a)(x) = f_2(xa^{-1}) = (a_{1,1} - ia_{1,2})f_2(x)$.

Luego $f_1, f_2 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[SL_2]^{(H)}$, y del párrafo anterior se deduce que si $a \in SO_2$, entonces

$$(f_1 f_2) \cdot a = (a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2)f_1 f_2 = det(a)f_1 f_2 = f_1 f_2.$$

Luego $f_0 = f_1 f_2 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[SL_2]^H$. Mas aún el peso de f_0 –para la acción de B– es χ^2.

Lema 5.4. *El retículo $\mathcal{X}$ de los pesos de B en $\mathbb{C}(SL_2/SO_2)$ está generado por χ^2.*

Demostración: Si $f \in {}^{(B)}\mathbb{C}(SL_2/SO_2)$, entonces para todo $b \in B$, tenemos que $b \cdot f = \chi^n(b)f$, para algún entero n. En particular para $b = -Id \in SO_2 \cap B$ tenemos que

$$f(Id) = (f \cdot b)(Id) = f(b^{-1}) = (b \cdot f)(Id) = \chi^n(b)f(Id).$$

Por otro lado $\chi^n(b) = (-1)^n$, de donde deducimos que n debe ser par.

Mas aún, si $f \in {}^{(B)}\mathbb{C}(SL_2/SO_2)$ es un vector de peso χ^{2n}, como f_0^n es también vector propio de peso χ^{2n} existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que $f = \alpha f_0^n$.

□

Hemos probado que $\mathcal{X} = \{\chi^{2n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq 2\mathbb{Z}$, entonces $V = V(SL_2/SO_2) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ es un espacio vectorial de dimensión uno, que está generado por $\nu_0 : \mathcal{X} \to \mathbb{Q}$, tal que $\nu_0(\chi^2) = 1$.

Estudiemos las imágenes por ρ de las valuaciones asociadas a los colores de SL_2/SO_2, i.e. a $\pi(D_1)$ y $\pi(D_2)$, notaremos $\nu_1 = \nu_{\pi(D_1)}$ y $\nu_2 = \nu_{\pi(D_2)}$. Observemos que las extensiones ($\bar{\nu_1}$ y $\bar{\nu_2}$) de ν_1 y ν_2 a $\mathbb{C}(SL_2)$ son las valuaciones asociadas a los divisores D_1 y D_2; por lo tanto $\bar{\nu_1}(f_1) = \bar{\nu_2}(f_2) = 1$ y $\bar{\nu_1}(f_2) = \bar{\nu_2}(f_1) = 0$. Entonces $\rho(\nu_1)(\chi^{2n}) = \nu_1((f_1 f_2)^n) = n(\nu_1(f_1) + \nu_1(f_2)) = n$; del mismo modo se muestra que $\rho(\nu_2)(\chi^{2n}) = n$.

Hemos probado que $\rho(\nu_1) = \rho(\nu_2) = \nu_0$ en V.

De acuerdo a la proposición 5.1, para determinar el cono de valuaciones G-invariantes, tenemos que estudiar las inecuaciones:

$$\nu(\alpha) \leq 0, \text{ con } \alpha \in \Phi^+.$$

Respecto a B el peso χ^2 es una raíz positiva, luego si $q\nu_0 \in V$ es tal $0 \geq q\nu_0(\chi^2) = q$, tenemos que $q\nu_0 \in \mathcal{V}$, lo que implica que $\{q\nu_0 \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leq 0\} \subset \mathcal{V}$.

Probaremos que $\nu_0 \notin \mathcal{V}$. Luego

$$\mathcal{V} = \{q\nu_0 \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leq 0\}.$$

Con la notación del lema 5.1, consideremos $g_1, g_2 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[SL_2/SO_2]$: tales que $g_1 = f_0$ y $g_2 = 1$, sea $h = f_1 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[SL_2]^{(SO_2)}$. Sean N_1 y N_2 los SL_2-submódulos de $\mathbb{C}[SL_2]$ generados por $(f_0 f_1)$ y f_1 respectivamente.

Consideremos las siguientes matrices de SL_2: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se puede verificar que $f = (f_0 f_1)(a_3 \cdot f_1) - \frac{1}{6}((a_1 \cdot f_0 f_1) - (a_2 \cdot f_0 f_1) - 2(a_3 \cdot f_0 f_1))f_1$ es un B-vector propio de peso χ^2, es decir $f \in {}^{(B)}(N_1 \cdot N_2)_{\chi^2}$. Luego $\delta(g_1, g_2, h, f) = \chi^2$, de donde deducimos que $\nu_0(\delta) > 0$ y por lo tanto $\nu_0 \notin \mathcal{V}$.

El siguiente es un esquema del cono $\mathcal{V}(SL_2/SO_2)$ como subconjunto de $V(SL_2/SO_2)$.

Bibliografía

1. Armand Borel, *Linear algebraic groups. 2nd enlarged ed.*, Graduate Texts in Mathematics, 126. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.
2. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc.: XXX: Algèbre commutative. Chap. 6: Valuations. (Actualités scientifiques et industrielles. 1308)*, Paris: Hermann, 1964.
3. M. Brion, *Variétés sphériques*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps`.
4. M. Brion, D. Luna, and Th. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), 617–632.
5. W. Ferrer and A. Rittatore, *Actions and invariants of algebraic groups*, Marcel Dekker, en proceso editorial, 2005.
6. William Fulton, *Introduction to toric varieties. The 1989 William H. Roever lectures in geometry*, Annals of Mathematics Studies. 131. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.
7. Frank D. Grosshans, *Algebraic homogeneous spaces and invariant theory*, Lecture Notes in Mathematics. 1673. Berlin: Springer, 1997.
8. Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics. 52. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1977.
9. James E. Humphreys, *Linear algebraic groups. Corr. 2nd printing*, Graduate Texts in Mathematics, 21. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1981.
10. Friedrich Knop, *The Luna-Vust theory of spherical embeddings.*, Ramanan, S. (ed.), Proceedings of the Hyderabad conference on algebraic groups held at the School of Mathematics and Computer/Information Sciences of the University of Hyderabad, India, December 1989. Madras: Manoj Prakashan. 225-249 , 1991.
11. Friedrich Knop, Hanspeter Kraft, Domingo Luna, and Thierry Vust, *Local properties of algebraic group actions*, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Semin. 13, 63-75 , 1989.
12. Friedrich Knop, Hanspeter Kraft, and Thierry Vust, *The Picard group of a G-variety*, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Semin. 13, 77-87 , 1989.
13. D. Luna and Th. Vust, *Plongements déspaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186–245.
14. Hideyasu Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 1–28.
15. Thierry Vust, *Plongements d'espaces symétriques algébriques: Une classification. (Embeddings of algebraic symmetric spaces: a classification)*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. **17** (1990), no. 2, 165–195.